ESERCIZI SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

Calcolare i seguenti integrali:

$$1) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}}$$

Conviene spezzare l'intervallo $(-1,1)$ in $(-1,0] \cup (0,1)$.
$\int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}$. Si puó svolgere l'integrale indefinito sostituendo $x = t^2$ e si ottiene $\frac{1}{2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right|$. Quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{+1} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \log 3 - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{\varepsilon}-2}{\sqrt{\varepsilon}+2} \right| = \frac{1}{2} \log 3.$$

Analogamente si calcola che $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{|x|}} = -\arctan \frac{1}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} (x^2 - x) e^{-x} dx$ [**R.**1]

3) $\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$ $\left[\mathbf{R}.\ -\frac{2}{3}\log 2 + \log 3\right]$

4) $\int^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ $\left[\mathbf{R}.\frac{\pi}{4}\right]$

5) $\int_0^{+\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx$ [**R.**1]

6) Discutere al variare di α e β l'esistenza del seguente integrale:
$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin \alpha x dx$ [**R.**esiste per $\alpha = 0, \forall \beta$, e $\alpha \neq 0, \beta \geq 0$]

Dire se i seguenti integrali convergono o meno:

7) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{x^x-1}-1}$ [**R.** converge]

Svolgimento: innanzitutto osserviamo che
$\lim_{x\to 0} x^{x^x-1} - 1 = \lim_{x\to 0} e^{(x^x-1)\log x} = 1$,
quindi l'integrando tende a $+\infty$ in zero.
Confrontiamolo con la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

Usando De L'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{e^{(x^x-1)\log x} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{(x^x-1)\log x}[e^{x\log x}(\log x+1)\log x + ((x^x-1)\frac{1}{x})]}.$$

Per ogni $\alpha \in (0,1)$ il limite viene finito (zero).

8) $\int_0^1 x^{\log x} dx$ [**R**. non converge]

9) $\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$ [**R**. non converge]

10) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} dx$ [**R**. converge]

11) $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sin x} dx$ [**R**. converge]

12) $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x} dx$ [**R**. converge]

Calcolare i seguenti integrali impropri:

13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} \mathrm{d}x$ (dando per scontato che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$)

14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} e^{-x} \cos x\right)}{x} \mathrm{d}x$

15) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} \mathrm{d}x$

Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}} \mathrm{d}x$

17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} \mathrm{d}x$

18) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x} \mathrm{d}x$