# Esercizi sull'uso delle derivate

**Esercizio 1**

Calcolare
$$lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin x}{x}\qquad x>0$$

**Esercizio 2**

Dimostrare che per ogni $x\in[0,1]$ si ha
$$\mathrm{arccosx}=2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

**Esercizio 3**

Sia $f$ continua e derivabile due volte in $(a,b)$, con derivata prima continua. Supponiamo che esista un punto $c\in(a,b)$ tale che $f(a)=f(b)=f(c)$. Dimostrare che esiste $y\in(a,b)$ tale che $f''(y)=0$.

**Esercizio 4**

Si dimostri la seguente generalizzazione del Teorema di Rolle:
sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che
$$lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a).$$
Allora esiste un punto $\xi\in(a,+\infty)$ tale che $f'(\xi)=0$.

**Esercizio 5** (Teorema della media integrale pesata)

Siano $g(x)$, $p(x)$ die funzioni integrabili in $[a,b)$ e sia $p(x)\geq 0$ in $[a,b]$. Dimostrare che $\forall x,x_0\in[a,b]$, $(x>x_0)$ si ha
$$l(x,x_0)\int_{x_0}^{x}p(t)dt\leq\int_{x_0}^{x}g(t)p(t)dt\leq L(x,x_0)\int_{x_0}^{x}p(t)dt,$$
e che se $g(x)$ é anche continua esiste un punto $\xi\in(x,x_0)$ tale che
$$\int_{x_0}^{x}g(t)p(t)dt=g(\xi)\int_{x_0}^{x}p(t)dt$$