ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

Esercizio 1
Calcolare i seguenti limiti facendo uso, se occorre, dei limti notevoli:

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right)$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{1+a^n},\ a\geq 1$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{10^{\sqrt{(\ln n)^2+\ln n^2}}}{n^2+1}$

(v) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)^n$

(vi) $\lim_{n\to\infty}\arctan(n^2-1)\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}$

(vii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\ln n}$

$(viii)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{2+n^2}{n^3}\cot\frac{1}{n}$

(ix) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)^{\cot\frac{1}{n}}$

(x) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}$

(xi) $\lim_{n\to\infty}n^2\frac{2^n}{3^n}$

(xii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sin n}{n^2+n}$

$(xiii)$ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^n,\ a\in\mathbf{R}^+$

(xiv) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2\sin\frac{1}{n}}{n^2+1}$

(xv) $\lim_{n\to\infty}(\cos\pi x)^{2n}$ determinare per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione converge.

(xvi) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\frac{1}{n}(\ln n)^2}{(n+1)^2}$

$(xvii)$ $\lim_{n\to\infty} n\left[(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]$

$(xviii)$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

(xix) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$

(xx) $\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

(xxi) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

$(xxii)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4}$

Esercizio 2
Usando la definizione di limite dimostrare che:

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-8n+4}{n-4} = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e$

Esercizio 3
Dire per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ la seguente successione ammette limite finito o infinito:

$$x_n = a^n \frac{(-1)^n}{(n^2+1)\sin\frac{1}{n^2}}.$$

Esercizio 4
Teoremi di Cesaro:
Teorema 1: Se la successione di termine generale a_n ha per limite l, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = l$.
Teorema 2: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty}(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.
Teorema 3: Se a_n é tale che $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = l$.
Teorema 4: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.
Utilizzando i teoremi di Cesaro calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}}{n}$

(b) $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n}$

Esercizio 5

Verificare che una successione a_n converge ad un numero l se e soltanto se entrambe le sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n-1} convergono allo stesso limite l.

Esercizio 6

Supponiamo che le sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n-1} estratte da una successione a_n siano entrambre monotone. Dimostrare che , se $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$, allora a_n ammette limite.

Esercizio 7

Verificare con un esempio che l'enunciato dell'esercizio precedente non é invertibile, ovvero esistono successioni a_n che ammettono limite, tali che a_{2n} e a_{2n-1} sono monotone ma $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) \neq 0$.