Soluzioni VI tutorato AM01a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

11 novembre 2004

Esercizio 1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) L'estremo superiore di E è sempre punto di accumulazione per E.

FALSO: quando l'estremo superiore è anche massimo potrebbe non essere punto di accumulazione!

b) Se c è un punto di accumulazione per E, dato un arbitrario $\epsilon > 0$, l'intervallo $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ deve contenere infiniti punti di E.

VERO!

c) Un punto di frontiera di E è un punto isolato di E.

FALSO: ad esempio l'estremo di un intervallo in $\mathbb{R}$ è punto di frontiera ma non isolato.

d) Un punto isolato di E è un punto di frontiera di E.

VERO: nella definizione di punto di frontiera si considera anche il centro dell'interno circolare.

e) L'intervallo $[a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

VERO

Esercizio 2. Dimostrare che:

a) Ogni insieme A, chiuso e limitato, ha Massimo e Minimo.

b) Se A è limitato superiormente e $supA \notin A$ allora $supA$ è un punto di accumulazione di A.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $C = A \cup B$, dove

$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x = -2 + \log(1 + \frac{1}{n})^{-1}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Determinare:

a) l'insieme dei punti di accumulazione di C.

Sol: $\{x \in \mathbb{R} : x \in [-2, 3]\}$

b) l'insieme dei punti isolati di C.

Sol: $\{x \in \mathbb{R} : x \in B\}$

c) l'insieme dei punti di frontiera di C.

Sol: $\{x \in \mathbb{R} : x \in B \cup \{-2, 3\}\}$

d) l'insieme dei punti interni di C.

Sol: $\{x \in \mathbb{R} : x \in (-2, 3)\}$

Esercizio 4. Dati i seguenti insiemi trovere tutti i punti di accumulazione, estremo inferiore, estremo superiore e qualora esistano massimo e minimo motivando ogni risposta con la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{n}{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol: fate attenzione, bisogna considerare n pari ed n dispari e considerare l'estremo (non max o min) dei due insiemi.

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + \log 1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$

Sol: poichè, a meno di un numero finito di termini, gli elementi di questo insieme decrescono con n (ed inf è $-\infty$), questo insieme non ha punti di accumulazione.

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\cos n\pi}{n^2+16}, n \in \mathbb{N}\}$

Sol: trattate $\cos n\pi$ come $(-1)^n$.

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = n + log\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_0\}$

Sol: modificate la struttura del logaritmo e ricordate chi tra n e $\log n$ cresce più velocemente.

Per qualsiasi chiarimento o segnalazione di errori potete contattare il tutore del corso tramite una mail all'indirizzo urbinati_st@libero.it