IV tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

21 ottobre 2004

Esercizio 1. Provare che 2 è un minorante e 6 un maggiorante del seguente insieme:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5n-1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$

Soluzione:

basta verificare che $x_n \leq 6 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (in questo caso escludendo lo 0!!!)

Esercizio 2. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Soluzione:

non c'è un modo univoco per cercare l'estremo superiore di una funzione. Ciò che dovete prendere dalla teoria sono le caratterizzazioni che servono come verifica.

Ad esempio in questo primo caso si poteva notare che gli elementi di E crescono con il crescere di n... (cosa sempre verificabile: basta far vedere che $x_n \leq x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n+1}{n+1} \Leftrightarrow 2n^2 + n - 1 \leq 2n^2 + n \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow OK!$). Avendo verificato la crescenza, il primo elemento ($n = 1$) sarà l'estremo inferiore e minimo di E. Per l'estremo superiore notiamo che il numeratore cresce come $2n$ mentre il denominatore come n, quindi per $n >> 0$ possiamo supporre che il rapporto andrà a 2...

Verifichiamo che 2 sia un maggiorante: questo succede $\Leftrightarrow x_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow OK!$ Inoltre notiamo che $-1 \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi 2 non appartiene all'insieme!

Fatto ciò verifichiamo che sia un estremo superiore: deve essere: $\forall \epsilon \geq 0, \exists n \in \mathbb{N} : 2 - \epsilon < x_n \Leftrightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n-1}{n} \Leftrightarrow 2n - \epsilon n < 2n - 1 \Leftrightarrow \epsilon n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$, ed esiste sempre un $n \in \mathbb{N}$ che verifica questa condizione!!!

b) $E = \{x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] : x = \frac{m}{2^n}, n, m \in \mathbb{N}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n-2}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 3. Dato l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : a_n = (-1)^n \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$ determinare, sup A, inf A.

Esercizio 4. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $\emptyset \neq X,\ Y,\ Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X.$$

Esercizio 5. Dimostrare che dati due insiemi qualunque $\emptyset \neq X,\ Y$, se $X + Y := \{x + y, x \in X,\ y \in Y\}$, si ha:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

Soluzione:

Per ogni $y \in Y$ $y \leq \sup Y$ e $y \geq \inf Y$, pertanto da $\inf Y \leq y \leq \sup Y$ segue che $\inf Y \leq \sup Y$. D'altra parte, poichè $Y \subseteq X$, sup è un maggiorante per Y, quindi $\sup X \geq y\ \forall y \in Y$, e allora $\sup X \geq \sup Y$ dato che $\sup Y$ è il più piccolo dei maggioranti. Analogamente si dimostra che $\inf X \leq \inf Y$.

Esercizio 6. Sia $X \in \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e sia $tX := \{tx :\ x \in X,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, allora si ha

$$\sup(tX) = t \sup X$$

Esercizio 7. Dimostrare che un insieme $X \in \mathbb{R}$ e' limitato $\Longleftrightarrow$ esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|x| < M,\ \forall x \in X$.