Soluzioni III tutorato AM01a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

14 ottobre 2004

Esercizio 1. Verificare quale tra le seguenti è una distanza in $\mathbb{R}$:

a) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

La distanza è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ che verifica le seguenti proprietà:

- $d(x,y) \geq 0 \quad \wedge \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
  -In questo primo caso che la distanza sia ≥ 0 è ovvio perchè la radice è definita positiva. $\sqrt{|x-y|}$ sarà uguale a $0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. OK! La prima propietà è verificata!!!
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
  -Per la seconda proprietà sfruttiamo quello che conosciamo sui moduli: $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|-(x-y)|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$. OK!
- (disuguaglianza triangolare) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,z) \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
  -Devo verificare se $\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \Rightarrow$ facendo i quadrati ottengo $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z|}\sqrt{|z-y|}$. Se verifico la disuguaglianza che ho appena ottenuto ho finito... Poichè $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-y|}\sqrt{|y-z|}$. OK!!
  Questa è una distanza!!

b) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ Non vale la prima propietà, non è una distanza!

N.B. Perchè sia una distanza la funzione deve verificare tutte le proprietà quindi appena una non è verificata potete concludere senza verificare le altre...

c) $d(x,y) = |x-y|^2$ Non vale la disuguaglianza triangolare, non è una distanza.

d) $d(x,y) = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$ Non vale la prima proprietà, non è una distanza.

e) $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$ È una distanza!

Esercizio 2. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$n^n \geq n!$$

- Base induttiva: $1 \geq 1$ OK!
- Ipotesi induttiva: $n^n \geq n!$
- Tesi: $(n+1)^{n+1} \geq (n+1)!$
  $(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n \geq (n+1)n^n$ (ipotesi induttiva) $\geq (n+1)(n!) = (n+1)!$ OK!

Esercizio 3. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta:

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = (2n+1)(n+1)$$

Esercizio 4. Si provi per induzione che, per ogni intero positivo n, risulta

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $P_1 :\ 1 = \frac{1(2)(3)}{6}$ OK.
- $P_n :\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $P_{n+1} :\ \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 =$ ipotesi induttiva $(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$ OK!!

Esercizio 5. Dimostrare la seguente proprietà, applicando il principio d'induzione:
per tutti i naturali $n \in \mathbb{N}$, la potenza n-esima di 4 diminuita di 1 è divisibile per 3.

Esercizio 6. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Esercizio 7. Dimostrare, per induzione, le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

Per qualsiasi chiarimento o segnalazione di errori potete contattare il tutore del corso tramite una mail all'indirizzo urbinati_st@libero.it