Soluzioni della simulazione di esonero di am1a
21 dicembre 2004
GIUSTIFICARE TUTTE LE AFFERMAZIONI

Esercizio 1.
Trovare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = (1 + (-1)^n)e^n$$

Per n pari si ottiene la sottosuccessione $a_{2n} = 2e^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, mentre per n dispari si ottiene $a_{2n+1} \equiv 0$. Quindi, poiché esiste una sottosuccessione che tende a zero, e zero é un minorante (assoluto! a_n é sempre positiva!), allora possiamo concludere che 0 é il minimo limite. D'altra parte, la sottosuccessione dei pari tende a $+\infty$, quindi il massimo limite non puó essere altro che $+\infty$.
Enunciare la caratterizzazione di massimo e minimo limite.
Sia data una successione a_n, L é massimo limite di a_n se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n > \nu \ a_n < L + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } a_n \in I(L, \varepsilon).$$

l é minimo limite di a_n se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n > \nu \ a_n > l - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } a_n \in I(l, \varepsilon).$$

Esercizio 2.
Determinare per quali $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ la seguente serie converge assolutamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n^2 x^3)}{n^2 + x^2}$$

Osserviamo che:

$$\log(n^2x^3) = \log(n^2) + \log(x^3) \leq 2\log(n^2) = 4\log n,$$

quindi

$$\left| \frac{\log(n^2x^3)}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{4\log n}{n^2}.$$

A questo punto, sapendo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$, si ha

$$\frac{4\log n}{n^2} \leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La seri armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, quindi per il criterio del confronto la nostra serie converge per ogni $x > 0$.
Criterio del confronto per serie a termini positivi:
Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi. Se, per $n \geq n_0$ si ha $a_n \leq b_n$, allora si ha anche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \quad \forall n \geq n_0$$

Esercizio 3.
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \arctan(\sqrt{n+2}) \left(1 + 2\sin\frac{1}{n}\right)^n .$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \arctan(\sqrt{n+2}) \left(1 + 2\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2\sin\frac{1}{n}} n 2 \sin\frac{1}{n}} =$$
$$= 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^2$$

Esercizio 4.
Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$$

Le serie si studiano con il criterio di Leibniz.
La funzione $\sin x$ é crescente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Quindi $\sin\frac{1}{n} < \sin\frac{1}{n-1}$ e poiché $\sin\frac{1}{n} > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$, sono soddisfatte tutte le ipotesi del criterio di Leibniz e la serie converge.
La successione $\frac{\log n}{n+1}$ tende a zero per $n \to +\infty$, ed é sempre positiva. Vogliamo provare che

$$\frac{\log(n+1)}{n+2} < \frac{\log n}{n+1}$$

Si ha:

$$\log(n+1)^{n+1} < \log n^{n+2} \Leftrightarrow \text{ (il } \log \text{ é crescente) } (n+1)^{n+1} < n^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < n$$

ma l'ultima disuguaglianza é vera in quanto

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$$

e quindi $e < n$ é vero per $n > 3$. Sono soddisfatte tutte le ipotesi del criterio di Leibniz e la serie converge.

Esercizio 5.
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\log n}{n - \cos n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{\cos n}{n}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

Enunciare la definizione di limite di successione: l é limite della successione a_n se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu > 0 : \ \forall n \geq \nu \ |a_n - l| < \varepsilon.$$

Enunciare una proprietá delle successioni monotone: le successioni monotone ammettono sempre limite, ovvero non sono mai indeterminate. In particolare le successioni crescenti tendono all'estremo superiore, quelle decrescenti all'estremo inferiore.