Esame scritto di Am1a
7 febbraio 2005

Esercizio 1.
Calcolare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \{x = \frac{1}{1+n} e^{(-1)^n n},\ n \in \mathbf{N}\}$$

Osserviamo subito che l'insieme non é limitato superiormente, infatti se n é pari

$$\frac{1}{1+2n} e^{2n} \to +\infty$$

quindi si puó concludere subito che l'estremo superiore é infinito. Infatti: $\forall M > 0 \exists \overline{x} \in \ A : \ \overline{x} > M$, e basta scegliere $\overline{x} = \frac{1}{1+n} e^n$. Si avrá, considerando che per n abbastanza grande $e^n > (1+n)n^2$

$$\frac{1}{1+n} e^n > \frac{1}{1+n} \cdot (1+n)n^2 = n^2 > M \Leftrightarrow \ n > \sqrt{M}.$$

Per quanto riguarda l'estremo inferiore, gli elementi sono tutti positivi, dimostriamo che 0 é il piú grande dei minoranti:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ \overline{x} \in A : \overline{x} < \varepsilon$$

scelgo un elemento con n dispari , quindi

$$\overline{x} = \frac{1}{(1+n)e^n} < \frac{1}{1+n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Esercizio 2.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)$$

Consideriamo che:

$$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0, \quad \left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}} \rightarrow e.$$

Si ha:

$$\frac{n+1}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) = \frac{n+1}{\sqrt{n}}\frac{\log n}{n} \log\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\frac{\log n}{\sqrt{n}} \log\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot e = 0.$$

Esercizio 3.
Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = n\left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

il simbolo $[\cdot]$ indica la funzione parte intera.
Se n é dispari, $\left[\frac{2n+1}{2}\right] = \left[n+\frac{1}{2}\right] = n$ quindi

$$a_{2n+1} = (2n+1)\left(n+\frac{1}{2}-n\right) = (2n+1)\frac{1}{2} \rightarrow +\infty$$

quindi concludiamo subito che il massimo limite é $+\infty$. D'altra parte $a_{2n} \equiv 0$, quindi , se dimostriamo che 0 é l'estremo inferiore dei minoranti definitivi avremo dimostrato che é il minimo limite.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n} : \forall n > \overline{n}\ a_n > 0 - \varepsilon$$

dimostriamolo:

$$a_n \geq a_{2n} \equiv 0 > 0 - \varepsilon.$$

Esercizio 4.
Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie converge assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (-1)^n}$$

Si deve studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{|n^x + (-1)^n|} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n^x + (-1)^n|}.$$

Se $x < 0$ non é verificata la condizione necessaria, quindi consideriamo solo $x > 0$. Se $x > 1$ la serie é del tutto assimilabile ad una serie armonica generalizzata del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ che converge (stiamo prendendo $x > 1$). Infine, per $0 < x < 1$ si ha $\frac{1}{n^x - 1} > \frac{1}{n}$ che diverge. Quindi la serie data converge assolutamente per $x > 1$.

Esercizio 5.
Stabilire per quali valori del parametro reale a la seguente successione ammette limite (finito o infinito):

$$x_n = \sin n^2 \log(1 + n^a)$$

Consideriamo che il seno pur essendo limitato, non ha limite all'infinito, oscilla tra i valori -1 e 1, quindi l'unico modo di ottenere l'esistenza del limite in questione é riuscire a far tendere a zero il logaritmo. Cosa possibile se $n^a \to 0$, quindi $a < 0$.