

# MASSIMO E MINIMO LIMITE DI SUCCESSIONI

Ricordiamo la definizione:

data una successione  $a_n$ ,  $L$  é massimo limite di  $a_n$  se é l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi. Un maggiorante definitivo per  $a_n$  é un numero  $M$  per cui esiste  $\nu \in \mathbb{R}$  tale che  $a_n < M \forall n > \nu$ . Analogamente il minimo limite é l'estremo superiore dei minoranti definitivi, dove un minorante definitivo é un numero  $m$  per cui esiste  $\nu \in \mathbb{R}$  tale che  $a_n > m \forall n > \nu$ . Dalla definizione si deduce la seguente caratterizzazione: un numero  $L$  é massimo limite di una successione  $a_n$  se verifica entrambe le seguenti proprietá:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n < L + \varepsilon \forall n > \nu$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ per infiniti indici } a_n > L - \varepsilon.$$

Analogamente un numero  $l$  é minimo limite di una successione  $a_n$  se verifica entrambe le seguenti proprietá:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n > l - \varepsilon \forall n > \nu$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ per infiniti indici } a_n < l + \varepsilon.$$

Un metodo per trovare massimo e minimo limite di una successione é il seguente: trovare due sottosuccessioni  $\{a_{n_k}\}$ ,  $\{a_{n_h}\}$ , che tendono a due limiti diversi,  $l, L$ , dopodiché, se  $l$  é tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n > l - \varepsilon \forall n > \nu$$

allora  $l$  é minimo limite di  $a_n$ . Se  $L$  é tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n < L + \varepsilon \forall n > \nu$$

allora  $L$  é massimo limite di  $a_n$ .

## Esercizio 1

Determinare massimo e minimo limite delle seguente successione:  $a_n = [\sin n + 1]$  dove  $[\cdot] =$  parte intera.

**Suggerimento:** Sfruttare il fatto, noto, che  $\max \lim \sin n = +1$ ,  $\min \lim \sin n = -1$ , e che esistono sempre due sottosuccessioni che tendono al massimo limite e al minimo limite.

**Esercizio 2**

Determinare massimo e minimo limite delle seguenti successioni:

(i)  $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$

(ii)  $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

(iii)  $a_n = \arctan(-2)^n$

(iv)  $a_n = (-1)^n + \sin \frac{1}{n}$