

I tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

30 settembre 2004

Esercizio 1. Siano A e B i seguenti insiemi. Si trovi $A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ e si indichi se i risultanti sono insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due:

- a) $A = (0, 2)$ $B = (1, 3)$ b) $A = (-\infty, 3]$ $B = (-\infty, 1)$
c) $A = [-1, 0]$ $B = (0, 1]$ d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$ $B = (1, 3)$

Esercizio 2. Dire, verificandone le proprietà, quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza in \mathbb{R} :

- a) $x \leq y$ b) $x + y$ è intero
c) $|x| = |y|$ d) $x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$

Esercizio 3. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a , $[a]$:

- a) $x = y$ b) $x^2 + y^2 \geq 6$ c) $x^2 + y^2 \geq 0$
d) $|x - y| \leq 12$ e) $\cos x = \cos y$ e) $|\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$

Esercizio 4. Dire quale tra le seguenti è una partizione giustificando la risposta:

- a) il parallelismo tra rette in un piano
b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a$ $x \in [-a, a]$
c) in \mathbb{N} : $\{i \text{ numeri primi}\}$ $\{i \text{ numeri pari}\} \setminus \{2\}$
d) in \mathbb{R} $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$

Esercizio 5. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

- a) $|ab| = |a||b|$ b) $\sqrt{a^2} = |a|$ c) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Esercizio 6. Si consideri l'equazione $\sqrt{5-x} = 1 + \sqrt{x}$. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene $5-x = 1 + 2\sqrt{x} + x$ cioè $2-x = \sqrt{x}$. Elevando nuovamente al quadrato si ottiene l'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$ che ha soluzioni $x = 4$ e $x = 1$. Sostituendo quindi $x = 4$ nell'equazione di partenza si ha $1 = 3$. Cos'è che non va?

Esercizio 7. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni trigonometriche:

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2 \sin x = \sqrt{2} \cos x$ c) $\sin x \cos x = \frac{\tan x}{4}$
d) $\sin^2 x + 2 \cos^2 x - \frac{3}{4} = 0$ e) $\cos 2x - \cos^2 x = \tan^2 x$

Esercizio 8. Stabilire per quali valori del parametro reale k ha significato ciascuna espressione dove α è un angolo del IV quadrante:

a) $\cos \beta = 1 - \frac{1}{k^2}$ b) $\tan \alpha = k^2 - k$

Esercizio 9. Semplifica, motivando i passaggi, le seguenti espressioni:

a) $\left[\frac{1}{\cos(-\alpha)} + \frac{\cos(\pi-\alpha)}{1-\sin(2\pi-\alpha)} \right] \tan(\pi + \alpha)$

b) $\frac{\tan(\frac{7}{4}\pi)}{\cos(\frac{3}{3}\pi)} - \frac{\cos \frac{3}{4}\pi}{\sin \frac{7}{6}\pi} + 2 \sin(\frac{3}{4}\pi) \cos(-\frac{\pi}{4}) - \sin \frac{3}{2}\pi$