VI tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

11 novembre 2004

Esercizio 1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare la risposta:

Sia E un insieme non vuoto di numeri reali.

a) L'estremo superiore di E è sempre punto di accumulazione per E.

b) Se c è un punto di accumulazione per E, dato un arbitrario $\epsilon > 0$, l'intervallo $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ deve contenere infiniti punti di E.

c) Un punto di frontiera di E è un punto isolato di E.

d) Un punto isolato di E è un punto di frontiera di E.

e) L'intervallo $[a, +\infty)$ risulta chiuso in $\mathbb{R}$, mentre l'insieme $[a, b)$ non è nè aperto nè chiuso.

Esercizio 2. Dimostrare che:

a) Ogni insieme A, chiuso e limitato, ha Massimo e Minimo.

b) Se A è limitato superiormente e $supA \notin A$ allora $supA$ è un punto di accumulazione di A.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $C = A \cup B$, dove

$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x = -2 + \log(1 + \frac{1}{n})^{-1}, n \in \mathbb{N}_0\}$. Determinare:

a) l'insieme dei punti di accumulazione di C.

b) l'insieme dei punti isolati di C.

c) l'insieme dei punti di frontiera di C.

d) l'insieme dei punti interni di C.

Esercizio 4. Dati i seguenti insiemi trovere tutti i punti di accumulazione, estremo inferiore, estremo superiore e qualora esistano massimo e minimo motivando ogni risposta con la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \frac{n}{n+4}, n \in \mathbb{N}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + \log 1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\cos n\pi}{n^2+16}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = n + log\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_0\}$