V tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

28 ottobre 2004

Esercizio 1. Trovare, qualora esistano, estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente un massimo e un minimo per lo stesso insieme. Motivare le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

a) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{t+1}{t-2}, t \in \mathbb{R}\}$

b) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \sin \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n^2}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = -n^2 + 22n + 10, n \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-\sqrt{n}}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 2. Dimostrare che:
se A è limitato superiormente, tale che $l = supA \notin A$ allora
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; I(l, \epsilon) : I(l, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; I(x, \epsilon) : I(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

b) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; I(0, \epsilon)$ e $\exists I(2, \epsilon)$ che contengono punti di A e di CA.

c) l'insieme dei punti interni A.

Esercizio 4. Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_0\}$, dimostrare che:

a) $\forall \epsilon > 0, \; \exists \; \overline{x} \in B : \overline{x} \in I(2, \epsilon)$.

b) $\exists r > 0 \; : \; I(2 + \frac{1}{4}, r) \cap A \neq \emptyset$.

c) $\forall r > 0, \exists I(2, r) : I(2, r) \cap B \neq \emptyset \wedge I(2, r) \cap CB \neq \emptyset$.

d) l'insieme dei punti interni di B.

Esercizio 5. Dato l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : a_n = (-1)^n \frac{n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\}$ determinare, motivando ciascuna risposta: sup A, inf A e che $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, I(1, \epsilon) : I(1, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Esercizio 6. Data la successione $a_n = \frac{3^n - 5}{2}, n \in \mathbb{N}$:

a) dimostrare che è strettamente crescente

b) determinare il primo valore dell'indice n in corrispondenza del quale i termini della successione risultano maggiori di 10^3.