

III tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

10 ottobre 2005

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti relazioni nell'insieme X sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive.

- a) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow b = a + 1$
- b) $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- c) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$
- d) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b \Leftrightarrow xy \geq 0$
- e) $X = \mathbb{R}^*$, $a \sim b \Leftrightarrow xy > 0$
- f) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c + d$
- g) $X = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ funzione}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$
- h) $X = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ funzione}\}$, $f \sim g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$

Esercizio 2. Si provi che le condizioni che definiscono una relazione di equivalenza sono indipendenti dando:

1. un esempio di relazione riflessiva e simmetrica, ma non transitiva
2. un esempio di relazione riflessiva e transitiva, ma non simmetrica
3. un esempio di relazione simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

Esercizio 3. Dire, verificandone le proprietà, quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza in \mathbb{R} :

- a) $x \leq y$ b) $x + y$ è intero
- c) $|x| = |y|$ d) $x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$

Esercizio 4. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a , $[a]$:

- a) $x = y$ b) $x^2 + y^2 \geq 6$ c) $x^2 + y^2 \geq 0$
- d) $|x - y| \leq 12$ e) $\cos x = \cos y$ e) $|\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$

Esercizio 5. Dire quale tra le seguenti è una partizione giustificando la risposta:

- a) il parallelismo tra rette in un piano
- b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \quad x \in [-a, a]$
- c) in \mathbb{N} : $\{i \text{ numeri primi}\} \quad \{i \text{ numeri pari}\} \setminus \{2\}$
- d) in \mathbb{R} $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$

Esercizio 6. Tramite il principio di induzione dimostrare che:
dati $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < x < y$,

$$x^n < y^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 7. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi:

- 1. $(a, b]$
- 2. $(-\infty, a] \cup (b, c), \quad a < b$
- 3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a - 1/n, b - 1/n), \quad b - a > 2$

Esercizio 8. Provare che 2 è un minorante e 6 un maggiorante del seguente insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5n-1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$$

Esercizio 9. Dato $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ trovare estremo superiore ed estremo inferiore di A motivando le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.