Soluzini del III tutorato di Analisi Matematica 1A

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

10 ottobre 2005

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti relazioni nell'insieme X sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive.

a) $X = \mathbb{N}, \quad a \sim b \Leftrightarrow b = a + 1$

b) $X = \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad A \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

c) $X = \mathbb{R}, \quad x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$

d) $X = \mathbb{R}, \quad a \sim b \Leftrightarrow xy \geq 0$

e) $X = \mathbb{R}^*, \quad a \sim b \Leftrightarrow xy > 0$

f) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c + d$

g) $X = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} | \ f \quad \text{funzione}\}, \quad f \sim g \Leftrightarrow g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$

h) $X = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} | \ f \quad \text{funzione}\}, \quad f \sim g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$

Soluzione 1. a) Per essere riflessiva la relazione deve essere tale che $\forall x \in X, x \sim x$, quindi ora andiamo a vedere che é impossibile che in $\mathbb{N}$ si verifiche che $x = x + 1$. Se fosse simmetrica si avrebbe che $\forall x, y \in X, x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, ma ovviamente se $b = a + 1$ è impossibile che contemporaneamente si abbia $a = b + 1$!!! Non essendo mai verificato che $a \sim b$ e $b \sim a$ si ha che la relazione è antisimmetrica. Infine per essere transitiva bisognerebbe avere che se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$. Ma se $a \sim b$ e $b \sim c$ vuol dire che $b = a+1$ e $c = b+1$, quindi $c = a+2$, quindi a e c non sono in relazione!!!

b) Riflessiva : NO Simmetrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : NO

c) Riflessiva : NO Simmitrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : SI

d) Riflessiva : SI Simmitrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : NO

e) Riflessiva : SI Simmitrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : SI

f) Riflessiva : SI Simmitrica : NO Antisimmetrica : SI Transitiva : SI

g) Riflessiva : NO Simmitrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : NO

h) Riflessiva : SI Simmitrica : SI Antisimmetrica : NO Transitiva : SI

Esercizio 2. Si provi che le condizioni che definiscono una relazione di equivalenza sono indipendenti dando:

1. un esempio di relazione riflessiva e simmetrica, ma non transitiva
2. un esempio di relazione riflessiva e transitiva, ma non simmetrica
3. un esempio di relazione simmetrica e transitiva , ma non riflessiva

Soluzione 2. La soluzione è lasciata alla fantasia dello studente!!!

Esercizio 3. Dire, verificandone le proprietà, quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza in $\mathbb{R}$:
$a)\ x \leq y \qquad b)\ x + y$ è intero
$c)\ |x| = |y| \qquad d)\ x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$

Soluzione 3. $a)\ x \leq y$
-Dato un insieme di partenza A, una relazione ρ è d'equivalenza in A se verifica $TUTTE$ le seguenti proprietà:
i) Riflessiva: $\forall a \in A \Rightarrow a\,\rho\,a$
In questo caso $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ è verificata, quindi la relazione è riflessiva.
ii) Simmetrica: $se\ a\,\rho\,b \Rightarrow b\,\rho\,a$
In questo caso non è vero che se $x \leq y$ allora $y \leq x$, quindi la nostra relazione NON è d'equivalenza!!!
iii) Transitiva: $se\ a\,\rho\,b \wedge b\,\rho\,c \Rightarrow a\,\rho\,c$
Non è necessario verificare la proprietà poichè non essendo verificata la seconda, già sappiamo che la nostra non è una relazione d'equivalenza.
$b)\ x + y$ è intero NON è d'equivalenza perchè non è né riflessiva né transitiva.
$c)\ |x| = |y|$ È d'equivalenza!
$d)\ x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$ È d'equivalenza!

Esercizio 4. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a, $[a]$:
$a)\ x = y \qquad b)\ x^2 + y^2 \geq 6 \qquad c)\ x^2 + y^2 \geq 0$
$d)\ |x - y| \leq 12 \qquad e)\ \cos x = \cos y \qquad e)\ |\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$

Soluzione 4. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a, $[a]$:
$a)\ x = y$
La classe di a è definita come $[a] = \{x \in A\,|a\,\rho\,x\}$
L'uguaglianza è una relazione d'equivalenza e [a]={a}!
$b)\ x^2 + y^2 \geq 6$ non è d'equivalenza.

c) $x^2 + y^2 \geq 0$ è d'equivalenza e [a]=$\mathbb{R}$.
d) $|x - y| \leq 12$ non è d'equivalenza.
e) $\cos x = \cos y$ è d'equivalenza e [a]=$\{a + 2k\pi, -a + 2k\pi 2\}$.
f) $|\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$ non è d'equivalenza.

Esercizio 5. Dire quale tra le seguenti è una partizione giustificando la risposta:
a) il parallelismo tra rette in un piano
b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \quad x \in [-a, a]$
c) in $\mathbb{N}$: $\{i\, numeri\, primi\} \quad \{i\, numeri\, pari\} \setminus \{2\}$
d) in $\mathbb{R}$ $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$

Soluzione 5. a) il parallelismo tra rette in un piano
Dato un insieme A e $B_i \subseteq A$ sottoinsiemi, avró che B_i è una partizione di A se:
i) $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i, j$
ii) $\bigcup_i B_i = A$
Il parallelismo tra rette è una partizione! Ogni B_i è una classe di parallelismo ben definita dal coefficiente angolare.
b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \geq a \quad x \in [-a, a]$ Non è una partizione perchè $\pm a$ appartengono all'intersezione.
c) in $\mathbb{N}$: $\{i\, numeri\, primi\} \quad \{i\, numeri\, pari\} \setminus \{2\}$ Non è una partizione perchè l'unione non è $\mathbb{N}$.
d) in $\mathbb{R}$ $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$ È una partizione.

Esercizio 6. Tramite il principio di induzione dimostrare che:
dati $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < x < y$,

$$x^n < y^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Soluzione 6. Come abbiamo ripetutamente visto, si verifica la disuguaglianza per n fissato, in questo caso se prendiamo $n = 1$ la disuguaglianza è vera per ipotesi. Ora verifichiamo il passo induttivo, cioé, assumiamo che $x^n < y^n$ e proviamo a dimostrare che $x^{n+1} < y^{n+1}$. Ma a questo punto sappiamo che $x^{n+1} = x^n \cdot x$, quindi $x^{n+1} = x^n \cdot x < y^n \cdot x < y^n \cdot y = y^{n+1}$.

Esercizio 7. Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi:

1. $(a, b]$
2. $(-\infty, a] \cup (b, c), \quad a < b$
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a - 1/n, b - 1/n), \quad b - a > 2$

Soluzione 7. 1. Andiamo a dimostrare con la defiizione che a è l' $inf((a,b])$. Questo vuol dire che dobbiamo vedere che $\forall \epsilon > 0$ troveremo sempre un elemento piú piccolo di $a+\epsilon$. Ora peró in $(a, a+\epsilon)$, cioé l'intersezione tra $(a,b]$ e $(a, a+\epsilon)$, troveremo sempre un elemento, ad esempio $a+\epsilon/2$. Allo stesso modo possiamo dimostrare che b è il $sup((a,b])$.

2. $inf((-\infty, a\,] \cup (b,c)) = -\infty\,,\ sup((-\infty, a\,] \cup (b,c)) = c$

3. $inf(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a-1/n, b-1/n)) = a-1\,,\ sup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a-1/n, b-1/n)) = b.$

Esercizio 8. Provare che 2 è un minorante e 6 un maggiorante del seguente insieme:
$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5n-1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$

Soluzione 8. Basta verificare che $x_n \leq 6\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \geq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$ (in questo caso escludendo lo 0!!!)

Esercizio 9. Dato $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ trovare estremo superiore ed estremo inferiore di A motivando le risposte verificandole attraverso la caratterizzazione.

Soluzione 9. Non c'è un modo univoco per cercare l'estremo superiore di una funzione. Ciò che dovete prendere dalla teoria sono le caratterizzazioni che servono come verifica.

Ad esempio in questo primo caso si poteva notare che gli elementi di E crescono con il crescere di n... (cosa sempre verificabile: basta far vedere che $x_n \leq x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n+1}{n+1} \Leftrightarrow 2n^2+n-1 \leq 2n^2+n \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow OK$!). Avendo verificato la crescenza, il primo elemento ($n=1$) sarà l'estremo inferiore e minimo di E. Per l'estremo superiore notiamo che il numeratore cresce come $2n$ mentre il denominatore come n, quindi per $n >> 0$ possiamo supporre che il rapporto andrà a 2...

Verifichiamo che 2 sia un maggiorante: questo succede $\Leftrightarrow x_n \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} \leq 2\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n \Leftrightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow OK$! Inoltre notiamo che $-1 \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi 2 non appartiene all'insieme!

Fatto ciò verifichiamo che sia un estremo superiore: deve essere: $\forall \epsilon \geq 0, \exists n \in \mathbb{N} : 2-\epsilon < x_n \Leftrightarrow 2-\epsilon < \frac{2n-1}{n} \Leftrightarrow 2n-\epsilon n < 2n-1 \Leftrightarrow \epsilon n > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$, ed esiste sempre un $n \in \mathbb{N}$ che verifica questa condizione!!!