

## SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

### Esercizio 1

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x-10}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

Usando il criterio della radice  $n$ -sima troviamo che la serie converge assolutamente (perché per applicare questo criterio dobbiamo inserire il modulo e quindi si studia la convergenza assoluta!) se  $\left|\frac{3x-10}{2}\right| < 1$  e risolvendo si trova l'intervallo  $x \in (\frac{8}{3}, 4)$ . Possiamo provare a verificare se c'è convergenza semplice negli estremi. Per  $x = \frac{8}{3}$  si ottiene la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$  che converge per il criterio di Leibniz (si veda l'esercizio 2), e per  $x = 4$  si ottiene la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  che converge.

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{x-2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Osserviamo innanzitutto che  $\cos n\pi = (-1)^n$ . Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Si ottiene che la serie converge assolutamente se  $\left|\frac{1}{x-2}\right| < 1$ , quindi per  $x > 3$  e  $x < 1$ . Se  $x = 1$  si ottiene la serie armonica, che diverge, se  $x = 3$  si ottiene  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  che converge per il criterio di Leibniz.

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x + 4)^n, \quad x > 0$$

Di nuovo studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Risolvendo la disequazione  $|\ln x + 4| < 1$  segue che la serie converge assolutamente per  $x \in (e^{-5}, e^{-3})$ . Non si ha convergenza semplice negli estremi.

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x} + \frac{3}{5}\right)^n$$

Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se  $\left|e^{-x} + \frac{3}{5}\right| < 1$ , quindi per  $x > -\ln \frac{2}{5}$ . Se  $x = -\ln \frac{2}{5}$  si ottiene  $\sum_{n=1}^{\infty} (1)^n$  che diverge. Quindi non si ha convergenza semplice dove non c'è quella assoluta.

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x^2-2} - 2\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se  $|e^{x^2-2} - 2| < 1$ , da cui si ha  $x \in (-\sqrt{2 + \ln 3}, -\sqrt{2}) \cup x \in (\sqrt{2}, \sqrt{2 + \ln 3})$ . Per  $x = \pm\sqrt{2}$  si ha anche convergenza semplice.

### Esercizio 2

In questa serie di esercizi si fa uso del criterio di convergenza di Leibniz per serie a segni alterni. Le ipotesi da verificare sono: data una serie del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  con  $a_n \geq 0$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e se  $a_n$  è decrescente, allora la serie converge.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$   
 $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$  é decrescente perché il logaritmo é crescente e tende a zero perché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = 0$  quindi la serie converge.

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{e^n + 3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n + 3n}$ .  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n + 3n} = 0$ ,  $e^n + 3n > 0$  e  $\frac{1}{e^n + 3n} > \frac{1}{e^{n+1} + 3(n+1)}$  cioè é decrescente.

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 20n + 2}$   
 Il polinomio  $n^2 - 20n + 2$  é crescente in  $n$  solo da un certo  $n$  in poi, però possiamo comunque usare il criterio di Leibniz perché comunque l'importante é la crescita per  $n$  grande. Infatti

$$n^2 - 20n + 2 < (n+1)^2 - 20(n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 - 20n - 20 + 2 \iff 2n > 19 \iff n > 10.$$

Quindi possiamo usare il criterio, perché si ha decrescenza e ovviamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 20n + 2} = 0$ .

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(2n+1))}{\ln n} \cdot n$   
 Osserviamo che  $\sin(\frac{\pi}{2}(2n+1)) = (-1)^n$  quindi, sapendo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \rightarrow 0$ , verifichiamo la decrescenza:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{\ln(n+1)} < \frac{n}{\ln n} &\iff n \ln(n+1) < (n+1) \ln n \iff \ln(n+1)^n < \ln n^{n+1} \iff \\ &\iff (n+1)^n < n^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \end{aligned}$$

l'ultima affermazione é vera perché  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e$ .