2. ESERCIZI SUI PUNTI DI ACCUMULAZIONE E TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

Esercizio 1
Trovare i punti di accumulazione e i punti isolati dei seguenti insiemi:
$(A) := \{x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
$(B) := \{x = \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$
$(C) := \{x = \frac{n-1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 2
Dare un esempio di:
(i) un insieme con infiniti elementi e senza punti di accumulazione;
(ii) un insieme con infiniti elementi e un solo punto di accumulazione;
(iii) un insieme che abbia un solo punto di accumulazione, tutti gli altri punti siano isolati e sia illimitato.

Esercizio 3
Dire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi, oppure né aperti né chiusi:
(i) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - 2| < 3\}$;
(ii) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}\ ,\ n = 1, 2, 3...\}$;
(iii) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$;
(iv) $\{x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 \neq 0\}$.

Esercizio 4
Dimostare che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Esercizio 5
Dimostare che se un insieme $A \subset \mathbb{R}$ é limitato superiormente e $\sup A \notin A$, allora $\sup A$ é un punto di accumulazione per A.