Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Esercizi 3 - Anelli di frazioni

1. Siano R un anello commutativo unitario ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Sia $j_S : R \longrightarrow S^{-1}R$ l'omomorfismo canonico. Verificare che se I e J sono ideali di R si ha che:

   (a) $(I+J)^e = I^e + J^e$;

   (b) $(IJ)^e = I^e J^e$;

   (c) $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$;

   (d) $(\sqrt{I})^e = \sqrt{I^e}$.

2. Un anello commutativo unitario R si dice *ridotto* se il suo nilradicale è nullo.

   (a) Verificare che se R è ridotto ed S è un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso, allora anche $S^{-1}R$ è ridotto.

   (b) Sia R un anello commutativo unitario tale che, per ogni $P \in \mathrm{Spec}(R)$, l'anello R_P è ridotto. Provare che R è ridotto.

3. Siano R un anello commutativo unitario ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Sia I un ideale di R ed $\overline{S}$ l'immagine di S in R/I.

   (a) Provare che l'applicazione canonica:

   $$\rho : (\overline{S}^{-1})(R/I) \longrightarrow S^{-1}R/IS^{-1}R$$

   definita da

   $$\rho\left(\frac{r+I}{s+I}\right) = \frac{r}{s} + IS^{-1}R$$

   è un isomorfismo di anelli.

   (b) Dedurne che se $P \in \mathrm{Spec}(R)$ con $I \subseteq P$ (da cui segue che $P/I \in \mathrm{Spec}(R/I)$), allora

   $$(R/I)_{P/I} \cong R_P/IR_P$$

(c) Dedurne che il campo residuo dell'anello locale (R_P, PR_P) è isomorfo al campo dei quozienti di R/P.

4. Sia P un ideale primo minimale di un anello ridotto R. Provare che $PR_P = (0)$ da cui $R_P = R_P/PR_P \cong q.f.(R/P)$, cioè la localizzazione di un anello ridotto R in un suo ideale primo minimale P è un campo isomorfo al campo dei quozienti di R/P.

5. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; determinare le localizzazioni di $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nei suoi ideali primi minimali.

6. Se R è un anello commutativo unitario con la proprietà che R_P è un dominio d'integrità per ogni $P \in \mathrm{Spec}(R)$, deve necessariamente essere R un dominio d'integrità?

7. Siano R un anello commutativo unitario e P, Q suoi ideali primi con $P \subseteq Q$. Provare che R_P è canonicamente isomorfo a $(R_Q)_{PR_Q}$. Dedurne che se R è un dominio d'integrità, per $P = (0)$, si ha un isomorfismo canonico tra $q.f.(R)$ e $q.f.(R_Q)$.

8. Sia D un dominio di integrità con campo dei quozienti K; per l'esercizio precedente, ogni localizzazione di D è immersa in K. Provare che

$$\bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} D_M = D.$$

9. Siano R un anello commutativo unitario e P un suo ideale primo. Sia $j_{R \setminus P} : R \longrightarrow R_P$ l'omomorfismo canonico. Provare che per $n \in \mathbb{N}$ l'ideale $(P^n)^{ec}$ è un ideale P-primario di R, detto *la n-esima potenza simbolica di* P e denotato con $P^{(n)}$.