Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 9 (29 novembre 2012)

1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo; provare che, se a, b sono due elementi qualsiasi di G, allora ciascuna delle equazioni
$$aX = b, \qquad Ya = b$$
ha una ed una sola soluzione.

2. Nel gruppo delle biiezioni di $\mathbb{R}^2$ si considerino gli elementi f e g definiti nel seguente modo: per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f((x, y)) = (-x, -y) \qquad\qquad g((x, y)) = (2 - x, 2 - y).$$
Determinare l'ordine di f, g e $g \circ f$.

3. Trovare l'ordine dei seguenti elementi:
   (a) $[3]_{20} \in \ Z_{20}$;
   (b) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \in \mathcal{C}_8$;
   (c) $[3]_{20} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$;
   (d) $-i \in \mathbb{C}$;
   (e) $-i \in \mathbb{C}^\star := \mathbb{C} - \{0\}$;
   (f) $(325) \circ (214) \in S_6$.

4. Esprimere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e poi come prodotto di trasposizioni:
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
Stabilire la parità di $(f \circ g)^{-1}$.

5. Esprimere i seguenti prodotti di permutazioni come prodotto di cicli disgiunti:
$$(8432) \circ (524), \quad (3761)^3, \quad (6512)^{-1}$$

6. Elencare tutti gli elementi di S_3 che sono permutazioni pari.
   Elencare tutti gli elementi di S_4 che sono permutazioni dispari.

7. Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $l > 2$ il cui quadrato è un ciclo.
   Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $l > 2$ il cui quadrato non è un ciclo.
   Stabilire quali sono i cicli per i quali è vero che il quadrato è ancora un ciclo.