**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013**
**AL110 - Algebra 1**
**Tutorato 8 (22 novembre 2012)**

1. Calcolare le seguenti potenze:

$$6^{15} \pmod{13}; \qquad 7^{67} \pmod{45}; \qquad 128^{10} \pmod{33}.$$

2. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo $n$ si ha che $42|n^7 - n$.

3. Provare che se $p$ è un numero primo, allora

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

4. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nella rappresentazione decimale di $7^{1000}$.

5. Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \ \ | \ \ n \geq 3\}$. Nel prodotto cartesiano $X \times X$ si consideri la seguente relazione d'ordine:

$$(a, b)\rho(c, d) \Longleftrightarrow a \quad \text{divide} \ \ c \ \ \text{e} \ \ b \leq d$$

con $a, b, c, d \in X$.

   (a) Stabilire se l'insieme ordinato $(X \times X, \rho)$ è totalmente ordinato.
   (b) Determinare gli eventuali elementi minimali di $(X \times X, \rho)$.
   (c) Determinare gli eventuali elementi massimali di $(X \times X, \rho)$.
   (d) Stabilire se esiste l'estremo inferiore e l'estremo superiore in $(X \times X, \rho)$ di $A = \{(12, 5), (21, 20), (5, 10)\}$

6. Nell'insieme $X := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 6, 9, 12\}$ si consideri la seguente relazione

$$x\sigma y \Leftrightarrow x|y \ \text{ in } \ \mathbb{Z}, \ \text{ cioè esiste } \ c \in \mathbb{Z} \ \text{ tale che } \ xc = y.$$

   (a) Stabilire di quali delle seguenti proprietà gode la relazione $\sigma$:
      i. riflessiva
      ii. simmetrica
      iii. antisimmetrica
      iv. transitiva
      v. totale.
   (b) Nell'insieme $X$ si consideri la seguente relazione $\rho$:

$$x\rho y \Leftrightarrow x\sigma y \text{ e } y\sigma x.$$

   Verificare che $\rho$ è una relazione di equivalenza su $X$ e determinare le classi di equivalenza modulo $\rho$.

(c) La relazione $\sigma'$ definita in $X/\rho$ nel seguente modo:

$$[x]_\rho \sigma' [y]_\rho \Leftrightarrow x\sigma y,$$

è una relazione d'ordine. Rappresentare $(X/\rho, \sigma')$ tramite un diagramma lineare.

7. Sia $a$ un intero fissato $\neq 0$. Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione binaria $*$ definita da:

$$x * y = x + y - a$$

con $x$, $y$ numeri interi.

   (a) Verificare che $*$ è associativa e commutativa.

   (b) Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo.

8. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \diamond (c, d) = (a + c, b + c).$$

   (a) Stabilire se $\diamond$ è associativa.

   (b) Stabilire se $\diamond$ è commutativa.

   (c) Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a $\diamond$.

9. Sia $H = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \neq 0\}$. Stabilire se $H$ è un gruppo rispetto alla seguente operazione: per $(a, b), (c, d) \in H$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, b + ad).$$

10. Stabilire se l'operazione binaria $*$ determina una struttura di gruppo sull'insieme dato nei seguenti casi:

   (a) Sia $*$ definita su $\mathbb{R}$ da:

$$a * b = a + b - ab.$$

   (b) Sia $X = \{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ e sia $*$ la moltiplicazione mod 10.

11. Sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei numeri razionali positivi; in $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ si consideri la seguente operazione $\star$: se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

$$(a, b) \star (c, d) = (\frac{ac}{7}, 3bd).$$

   (a) Provare che $(\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+, \star)$ un gruppo.

   (b) Determinare l'inverso di $(2, 5)$.