

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 7 (15 novembre 2012)

1. Determinare tutte le eventuali soluzioni delle seguenti congruenze lineari:

(a) $10X \equiv 11 \pmod{21}$;

(b) $8X \equiv 14 \pmod{31}$;

(c) $6X \equiv 18 \pmod{25}$;

(d) $10X \equiv 32 \pmod{33}$;

(e) $33X \equiv 43 \pmod{101}$.

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni delle seguenti congruenze lineari:

(a) $10X \equiv 0 \pmod{50}$;

(b) $8X \equiv 14 \pmod{30}$;

(c) $6X \equiv 18 \pmod{24}$;

(d) $10X \equiv 32 \pmod{35}$;

(e) $33X \equiv 143 \pmod{242}$.

3. Determinare tutte le eventuali soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 5X \equiv 7 \pmod{9} \\ 9X \equiv 8 \pmod{13} \\ 11X \equiv 15 \pmod{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X \equiv 4 \pmod{5} \\ 10X \equiv 6 \pmod{7} \\ 11X \equiv 14 \pmod{16} \\ 3X \equiv 6 \pmod{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10X \equiv 4 \pmod{12} \\ 8X \equiv 9 \pmod{5} \\ 8X \equiv 14 \pmod{49} \end{cases}$$

4. Determinare il più piccolo intero positivo soluzione del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 5 \pmod{8} \\ 2X \equiv 3 \pmod{9} \\ 7X \equiv 6 \pmod{13} \\ 4X \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

5. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 12 \pmod{13} \\ 8X \equiv 20 \pmod{28} \\ 9X \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$$

6. Trovare il più piccolo intero $a > 2$ tale che

$$2 \mid a, \quad 3 \mid a + 1, \quad 4 \mid a + 2, \quad 5 \mid a + 3, \quad 6 \mid a + 4.$$

7. Provare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv 5 \pmod{6} \\ X \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$$

non possiede soluzioni.

8. (*) Provare che il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} X \equiv a \pmod{n} \\ X \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

ammette una soluzione se e solo se $\text{MCD}(n, m) \mid a - b$. Se una soluzione esiste, verificare che essa è unica modulo $\text{mcm}(n, m)$.