

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 3 (11 ottobre 2012)

1. Si considerino le seguenti applicazioni:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definita da } f(x) = x^3 - 1,$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definita da } g(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definita da } h(x) = \sin x.$$

- (a) Dire quali applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive.
(b) Determinare l'immagine di ogni applicazione.
2. Siano $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ applicazioni definite rispettivamente da $f(x) = 2x^3 - 1$ e $g(x) = 5x - 4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Descrivere $(g \circ f)^{-1}$ e verificare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Se $x \in \mathbb{R}$, sia $[x]$ il più grande intero minore o uguale ad x , detto anche **parte intera di x** . Siano le applicazioni $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definite nel modo seguente:

$$g(z) := 2z, \quad f(z) := [z/2].$$

- (a) Descrivere l'applicazione $g \circ f$ e dire se essa è uguale a $f \circ g$.
(b) Cosa si può dire sulle proprietà di iniettività e di suriettività di f e di g ?
4. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f((a, b)) = a + 7b + 11$.
Trovare $\text{Im } f$ e verificare che f non è iniettiva.

5. Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica e totale sono soddisfatte dalle seguenti relazioni su \mathbb{Z} :

siano $x, y \in \mathbb{Z}$

(a) $x\sigma_1 y \Leftrightarrow x \leq y - 1$;

(b) $x\sigma_2 y \Leftrightarrow xy = 0$;

(c) $x\sigma_3 y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.

6. Nell'insieme

$$X = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

si consideri la seguente relazione

$$x\sigma y \Leftrightarrow x|y \text{ in } \mathbb{Z}, \text{ (cioè esiste } c \in \mathbb{Z}, \text{ tale che } xc = y).$$

Stabilire di quali delle seguenti proprietà gode la relazione σ :
riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva e totale.