Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Tutorato 2 (4 ottobre 2012)

1. Siano $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$.
   (a) Dare un esempio di corrispondenza tra X ed Y.
   (b) Dare un esempio di corrispondenza da Y in X.
   (c) Dare un esempio di applicazione da X in Y.
   (d) Dare un esempio di applicazione da Y in X.
   (e) Scrivere esplicitamente tutte le applicazioni da Y in X.

2. Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $X \times Y$ sono grafici di applicazioni:
   (a) $G = \{(e, 2), (c, 2), (d, 2), (a, 8)\}$;
   (b) $G = \{(b, 3), (c, 1), (d, 7), (e, 7), (a, 3), (b, 5)\}$;
   (c) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 5), (a, 7), (e, 2)\}$;
   (d) $G = \{(b, 2), (c, 8), (d, 7), (e, 1), (a, 3)\}$.

3. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono grafici di applicazioni:
   (a) $G = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 18\}$;
   (b) $G = \big\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y = 18\big\}$;
   (c) $G = \big\{(x, y) \mid 2x - 3y^2 = 18\big\}$;
   (d) $G = \big\{(x, y) \mid 2x^2 - 3y^2 = 18\big\}$.

4. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da:
   (a) $f(x) = 2x - 1,\ \ g(y) = 3y + 8$;
   (b) $f(x) = 2x - 1,\ \ g(y) = y^2$;
   (c) $f(x) = x^3,\ \ g(y) = y^4$.

   Calcolare $g \circ f$ e $f \circ g$.

5. (a) Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(n) = 7n + 3$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Determinare $f^{-1}(17)$, $f^{-1}(-19)$, $f^{-1}(\{26, -31, 0\})$.
   (b) Sia $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'applicazione definita da $g(x) = 7x + 3$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Determinare $g^{-1}(17)$, $g^{-1}(-19)$, $g^{-1}(\{26, -31, 0\}$.

6. Sia $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ l'applicazione definita per $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ da $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$.
   (a) Verificare che f è biiettiva.
   (b) Determinare esplicitamente f^{-1}.

7. Sia $f : X \longrightarrow X$ un'applicazione tale che $f \circ f = id_X$. Verificare che f è biiettiva.

8. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

   (b) Siano x, y numeri reali qualunque.
   Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} (x + ky) = \frac{1}{2}(n+1)(2x + ny)$$

   (c) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

   (d) Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto 2 + 3x \in \mathbb{Z}.$$

   Si definisca per induzione l'applicazione $f^n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ponendo $f^1 = f$ ed $f^n = f \circ f^{n-1}$, per $n > 1$. Provare che per ogni numero natuarale n risulta $f^n(x) = 3^n x + 3^n - 1$.

9. Siano S e T insiemi non vuoti ed ambedue non costituiti da un solo elemento. Determinare un sottoinsieme di $S \times T$ che non è un prodotto cartesiano di tipo $X \times Y$ con $X \subseteq S$ e $Y \subseteq T$. Dedurne che in generale $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(T) \subseteq \mathcal{P}(S \times T)$ senza che valga necessariamente l'uguaglianza.

10. Siano S, T, V insiemi non vuoti. Siano $f : S \to T$ un'applicazione e $g : T \to V$ un'applicazione biiettiva. Provare che f è suriettiva se e solo se $g \circ f$ è suriettiva.

11. Siano S, T, V insiemi non vuoti. Siano $f : S \to T$ un'applicazione e $g : V \to S$ un'applicazione biiettiva. Provare che f è iniettiva se e solo se $f \circ g$ è iniettiva.

12. Siano S, T e V insiemi. Provare che: $(S - T) \times V = (S \times V) - (T \times V)$.