LA NOZIONE DI INSIEME, PRIME OPERAZIONI TRA INSIEMI, ELEMENTI BASILARI DI LOGICA

L'impostazione logico-deduttiva propria della matematica affida un'importanza basilare alle definizioni. La ricerca, poi, della formulazione di definizioni "utili" e "ben motivate", cioè tali da permettere lo sviluppo di teorie interessanti e di ottenere risultati profondi, è un ingrediente fondamentale per lo sviluppo della creatività matematica.

Non si può tacere, però, sul fatto che non è possibile fondare una teoria, definendo tutti i termini introdotti, perché una qualsiasi definizione presuppone sempre termini precedentemente noti. Ad esempio, se si definisce *un insieme* come una collezione ben determinata di oggetti, allora è naturale chiedersi che cosa si intende per collezione. Se si definisce *collezione* un aggregato di oggetti, allora si pone il problema di chiarire il significato di aggregato, etc.. A causa della finitezza del linguaggio, ad un certo punto si ritornerà necessariamente ad usare termini già impiegati.

Pertanto, per iniziare, *si deve assumere l'esistenza di alcuni oggetti "primitivi", cioè oggetti "non definiti".* Nell'impostazione cosiddetta"ingenua" (o, "naïf") della teoria degli insiemi, che è quella che verrà tratteggiata nel seguito, la nozione di insieme, introdotta e studiata da G. Cantor attorno al 1878, è uno di questi concetti primitivi.

La teoria degli insiemi può essere sviluppata su base assiomatica. Tale approccio è indispensabile per superare i vari paradossi che sono stati scoperti a partire dall'inizio del 1900 e per dare basi rigorose ai fondamenti della matematica. Tuttavia, una teoria astratta, puramente assiomatica degli insiemi è troppo impegnativa per essere svipluppata in un corso introduttivo di algebra.

In queste note introduttive, pertanto, assumeremo che tutti comprendano intuitivamente ed abbiano la stessa idea della nozione di insieme, in modo da rendere possibile la sua utilizzazione come dato oggettivo.

1. Terminologia di base della teoria "ingenua" od "intuitiva" degli insiemi

Riassumiamo, schematicamente, alcuni fatti e proprietà concernenti gli insiemi che noi assumeremo validi, senza ulteriori commenti.

► Un *insieme* I è una collezione di oggetti chiamati *elementi dell'insieme;* se a è uno di questi elementi, scriveremo $a \in I$ (e leggeremo "a appartiene ad I").

► *Un insieme deve essere ben definito,* nel senso che se I è un insieme ed a è un qualche oggetto, allora *si deve poter stabilire in modo certo se a appartiene ad I* (in simboli, $a \in I$), *oppure se a non appartiene ad I* (in tal caso scriveremo $a \notin I$).

► Esiste un solo insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto* e denotato $\emptyset$.

► *Due insiemi A e B si dicono uguali* se hanno gli stessi elementi, in tal caso scriveremo $A = B$.

► Se ogni elemento di un insieme A è un elemento di un insieme B, allora diremo che *A è un sottoinsieme di B;* in simboli, scriveremo $A \subseteq B$ (tale notazione non

esclude che $A = B$).
Diremo che A *è un sottoinsieme proprio di* B se $A \subseteq B$ ed $A \neq B$; in tal caso scriveremo $A \subsetneq B$ (oppure $A \subset B$) e diremo che *l'inclusione di* A *in* B *è stretta.*

▶ *L'insieme vuoto si considera sottoinsieme di ogni insieme.*

Esistono essenzialmente due modi per descrivere un insieme:

• *elencando*, se possibile, *tutti i suoi elementi* (scrivendoli tra parentesi graffe e separandoli con delle virgole; ad esempio "l'insieme A di tutti i numeri interi positivi fino a 5" si scrive: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$);

• *descrivendo una proprietà caratteristica* $\boldsymbol{P}(x)$, che deve essere verificata da tutti e soli gli elementi x dell'insieme (in tal caso, scriveremo $A := \{x : \boldsymbol{P}(x)\}$; ad esempio "l'insieme A dei numeri interi pari" si può scrivere

$$A := \{x : x = 2n \text{ dove } n \text{ è un numero intero}\}).$$

▶ Il simbolo ":=" sopra utilizzato, che si legge *"uguale per definizione"*, sta ad indicare che l'oggetto a primo membro è definito tramite l'oggetto (già noto e posto) a secondo membro.

▶ D'altro lato, il simbolo "=" (*"uguale"*) verrà impiegato soltanto per indicare 1'esistenza di una relazione di uguaglianza tra due oggetti precedentemente definiti in maniera autonoma.

Ogni definizione è un'affermazione di tipo "se e soltanto se", ma nel linguaggio corrente si usa tralasciare il "soltanto se".

Esempi.

(1) Ad esempio si dice che, per definizione, *un numero intero* x *è pari* se (e soltanto se) è divisibile per 2. In simboli scriveremo:

$$x \text{ è un numero intero pari } :\Leftrightarrow \ x = 2n, \quad \text{per qualche numero intero } n\,;$$

dove il simbolo ":⇔" si legge *"se (e soltanto se) per definizione".*

(2) L'uso dei simboli "=", ":=" e ":⇔" è illustrato anche nel seguente esempio. Dati due insiemi A e B, allora:

$$A = B \ :\Leftrightarrow \ A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A\,.$$

2. Notazioni e rudimenti di logica elementare

Per semplicità di scrittura, senza troppe pretese di rigore formale, introduciamo alcuni simboli (connettori e quantificatori) logici entrati nell'uso corrente:

denominazione	**simbolo**	**"traduzione"**
implicazione logica	$\Rightarrow$	"implica" (ovvero, "segue che")
equivalenza logica	$\Leftrightarrow$	"è equivalente a"
quantificatore esistenziale	$\exists$	"esiste"
quantificatore universale	$\forall$	"per ogni"
congiunzione	$\wedge$	"e"
disgiunzione	$\vee$	"o" nell'accezione "o/e" (*vel* in latino)
negazione	$\neg$	"non"

Schema di ulteriori simboli che verranno utilizzati nel seguito, alcuni dei quali sono stati già introdotti.

denominazione	**simbolo**	**"traduzione"**
appartenenza	$\in$	"elemento di"
non appartenenza	$\notin$	"non elemento di"
contenimento	$\subseteq$	"sottoinsieme di"
contenimento proprio	$\subsetneq$	"sottoinsieme propriamente contenuto in"
proprietà di definizione	$:\Leftrightarrow$	"se (e soltanto se) per definizione"
uguaglianza per definizione	$:=$	'uguale per definizione a"
uguaglianza	$=$	" uguale (identico) a"
negazione del quantificatore $\exists$	$\nexists$	"non esiste"
negazione del contenimento	$\nsubseteq$	"non è sottoinsieme di"
quantificatore esistenziale ristretto	$\exists!$	"esiste ed è unico"

Esempi.

(1) T è un triangolo equilatero $\Rightarrow$ T è un triangolo isoscele.
(2) $\neg(x \in A) \Leftrightarrow x \notin A$.
(3) Dati due insiemi, A, B, allora:

$$A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$

$$A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B\,,\; y \notin A).$$

$$A \nsubseteq B \;:\Leftrightarrow\; \neg(A \subseteq B) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A\,,\; x \notin B).$$

(4) $\{1,2,3,4\} \nsubseteq \{1,2,3,5,6\}$; $\quad 4 \notin \{1,2,3,5,6\}$.
(5) $\{1,2,3,4\} \subsetneq \{1,2,3,4,5\}$.
(6) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. La proposizione *"per ogni numero reale x esiste un unico numero reale y in modo tale che $x + y = 0$"* si scrive:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\; \exists! y \in \mathbb{R} \;:\; x + y = 0\,.$$

(7) Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri interi positivi. La proposizione *"per ogni numero intero $x \geq 2$ esiste un numero primo p in modo tale che x sia un multiplo di p"* si scrive:

$$\forall x \in \mathbb{N}^+\,,\; x \geq 2\,,\; \exists p\,,\ \text{numero primo}\,,\; \exists y \in \mathbb{N}^+ \;:\; x = py\,.$$

Si noti che in questo caso p (ed y) possono non essere univocamente determinati (ad esempio, se $x = 30$, allora abbiamo che x è un multiplo del numero primo 2 ed anche un multiplo dei numeri primi 3 e 5 (cioè, $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$).

► Si dice *proposizione* un'affermazione per la quale possa essere stabilito in modo univoco e senza ambiguità se essa è vera oppure falsa.

Esempio.

Si considerino le seguenti affermazioni:

(a) $2 + 3 = 3 + 2$;
(b) $1^2 + 2^2 = (1 + 2)^2$;
(c) $x^2 + 1 = 0$.

Allora, **(a)** è una proposizione (vera, per la proprietà commutativa della somma tra interi); **(b)** è una proposizione (falsa, 5 non è il quadrato di nessun numero intero); **(c)** non è una proposizione, perché la sua verità oppure falsità non può essere determinata senza specificare l'ambito di variabilità dell'elemento x (ad e-sempio è vera se x è un numero complesso, precisamente $x = \pm i$, ma è falsa se x è un qualunque numero reale).

► Data una proposizione $\boldsymbol{P}$ è sempre possibile introdurre una nuova proposizione $\neg \boldsymbol{P}$, detta *la negazione della proposizione* $\boldsymbol{P}$, definita nella maniera seguente:
$\neg \boldsymbol{P}$ è vera, se $\boldsymbol{P}$ è falsa
$\neg \boldsymbol{P}$ è falsa, se $\boldsymbol{P}$ è vera.

► *Tabelle di verità.* Per esprimere schematicamente la "verità" di $\neg \boldsymbol{P}$ (in funzione di quella di $\boldsymbol{P}$) si usa la seguente tavola, detta *tabella di verità* e che, in tal caso, definisce la proposizione $\neg \boldsymbol{P}$:

$\boldsymbol{P}$	$\neg \boldsymbol{P}$
v	f
f	v

dove *"v"* è l'abbreviazione di *vero* e *"f"* è l'abbreviazione di *falso.*

► Il *calcolo proposizionale* è lo studio dei rapporti formali esistenti tra varie proposizioni e può essere definito in modo assiomatico (come noi accenniamo nel seguito), indipendentemente da ogni interpretazione sui valori di verità che possono essere attribuiti alle singole proposizioni.

► Due "connettivi" fondamentali che collegano tra loro le proposizioni sono le congiunzioni "e" (in simboli "$\wedge$") ed "o" (nel senso o/e, in latino *"vel"*) in simboli "$\vee$"".

Precisamente, date due proposizioni $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$, allora le affermazioni "$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$" e "$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$" sono ancora delle *proposizioni* le quali vengono *definite tramite le seguenti tabelle di verità:*

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

In altri termini, per definizione, $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ *è vera se (e soltanto se)* $\boldsymbol{P}$ *e* $\boldsymbol{Q}$ *sono entrambe vere,* mentre $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ *è falsa se (e soltanto se)* $\boldsymbol{P}$ *e* $\boldsymbol{Q}$ *sono entrambe false.*

► Siano $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ due proposizioni, molti enunciati in matematica si formano collegando $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ con il connettivo "$\Rightarrow$".
L'affermazione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" si legge oltre che "$\boldsymbol{P}$ *implica* $\boldsymbol{Q}$" anche, in modo del tutto equivalente,
"*se* $\boldsymbol{P}$ *allora* $\boldsymbol{Q}$",
"$\boldsymbol{P}$ *soltanto se* $\boldsymbol{Q}$",
"$\boldsymbol{P}$ *è (una condizione) sufficiente per* $\boldsymbol{Q}$",
"$\boldsymbol{Q}$ *è (una condizione) necessaria per* $\boldsymbol{P}$".
Per definizione, l'affermazione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" è *una proposizione, che si considera falsa se (e soltanto se)* $\boldsymbol{P}$ *è vera e* $\boldsymbol{Q}$ *è falsa.* Pertanto, la tabella di verità che definisce la proposizione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" è la seguente:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

N.B. Nel seguito, spesso per indicare in breve che "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" è falsa scriveremo "$\boldsymbol{P} \not\Rightarrow \boldsymbol{Q}$". Se poi scriveremo "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$", senza specificare il valore di verità, intenderemo che "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" è vera.

► Se le tavole di verità di due proposizioni sono identiche, allora le *proposizioni* si dicono *logicamente equivalenti.* Si noti che la proposizione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" è equivalente alla proposizione "$(\neg \boldsymbol{P}) \vee \boldsymbol{Q}$", infatti:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\neg \boldsymbol{P}$	$(\neg \boldsymbol{P}) \vee \boldsymbol{Q}$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

e

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

► L'affermazione "$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$" è una *proposizione definita come congiunzione delle proposizioni "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" e "$\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P}$"* (in simboli, $(\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}) := (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{P})$). Pertanto la tabella di verità che definisce "$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$" è la seguente:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

La proposizione "$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$" si legge *"$\boldsymbol{P}$ se e soltanto se $\boldsymbol{Q}$"* oppure *"Condizione necessaria e sufficiente per $\boldsymbol{P}$ è $\boldsymbol{Q}$".*

L'equivalenza logica delle proposizioni "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" e "$(\neg \boldsymbol{P}) \vee \boldsymbol{Q}$" si può esprimere anche nella maniera seguente:

$$(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \iff ((\neg \boldsymbol{P}) \vee \boldsymbol{Q}) .$$

Ulteriori esempi di proposizioni logicamente equivalenti (da verificare –per esercizio– sviluppando le relative tabelle di verità).

(1) $\neg(\neg \boldsymbol{P})$ è logicamente equivalente a $\boldsymbol{P}$ (per ogni proposizione $\boldsymbol{P}$).

(2) Date comunque due proposizioni $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, allora $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ è logicamente equivalente a $(\neg \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{P})$.

► *Una tautologia* è una proposizione composta da proposizioni (elementari) collegate tra loro da connettivi logici che è sempre vera, qualunque il valore di verità assunto dalle proposizioni (elementari) di cui essa è composta.

Esempio

Date tre proposizioni $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{R}$, allora la seguente proposizione è una tautologia:

$$((\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R})) \Rightarrow (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R}) .$$

Infatti:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R}$
v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f
v	f	v	f	v	v
f	v	v	v	v	v
v	f	f	f	v	f
f	v	f	v	f	v
f	f	v	v	v	v
f	f	f	v	v	v

pertanto, proseguendo nella tabella di verità (riprendendo anche le tre ultime colonne che servono per continuare nello sviluppo della tabella), abbiamo:

$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R}$	$(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R})$	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R}$	$((\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R})) \Rightarrow (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R})$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	f	v	v
v	v	v	v	v
f	v	f	f	v
v	f	f	v	v
v	v	v	v	v
v	v	v	v	v

► Il *Metodo di Dimostrazione per Assurdo* permette di affermare che una proposizione $\boldsymbol{P}$ è vera se da $\neg \boldsymbol{P}$ segue una contraddizione (ovvero, $\neg \boldsymbol{P}$ è vera se da $\boldsymbol{P}$ segue una contraddizione). Tale metodo trova il suo fondamento teorico sulla equivalenza logica (sopra evidenziata) tra $\neg(\neg \boldsymbol{P})$ e $\boldsymbol{P}$.

Una delle varianti principali del Metodo di Dimostrazione per Assurdo si basa sulla equivalenza logica tra le proposizioni "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" e "$(\neg \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{P})$" , che riconduce la dimostrazione dell'implicazione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" a quella di "$(\neg \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{P})$".

Ad esempio, siano:

$$\boldsymbol{P} := \text{“ } x \text{ è un intero e } x \geq 3.$$
$$\boldsymbol{Q} := \text{“ } x \text{ è un intero e } x^2 \geq 9.$$

Per dimostrare che "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" si può ricorrere, a titolo esemplificativo, al Metodo di Dimostrazione per Assurdo dimostrando che da $\neg \boldsymbol{Q}$ discende $\neg \boldsymbol{P}$. Infatti, avendo come ipotesi iniziale $\boldsymbol{P}$, se assumendo $\neg \boldsymbol{Q}$ si arriva a concludere che anche $\neg \boldsymbol{P}$ sussiste, allora si ha la contraddizione cercata.

Nel caso precedente, supponiamo per ipotesi che x sia un intero e $x \geq 3$, se -per assurdo- x^2 non fosse ≥ 9, allora per l'ordinamento lineare degli interi dovrebbe essere $x^2 \leq 8$, da ciò seguirebbe immediatamente che il valore assoluto dell'intero x dovrebbe essere necessariamente minore od uguale a 2, fatto che contraddice che $x \geq 3$.

Si noti che in questo esempio "$\boldsymbol{Q} \not\Rightarrow \boldsymbol{P}$" (ad esempio $x = -4$ verifica $\boldsymbol{Q}$ ma non $\boldsymbol{P}$) e quindi, in tal caso $\boldsymbol{P}$ non è equivalente a $\boldsymbol{Q}$.

Un'ulteriore variante del Metodo di Dimostrazione per Assurdo per dimostrare la proposizione "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$" consiste nell'utilizzare un'appropriata proposizione ausiliaria $\boldsymbol{R}$. Precisamente se si riesce a dimostrare che
(i) "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R}$", e
(ii) "$\neg \boldsymbol{Q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{R}$",
allora necessariamente "$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$", perché altrimenti si arriverebbe ad una contraddizione (cioè, $\boldsymbol{R}$ e $\neg \boldsymbol{R}$ verrebbero a sussistere contemporaneamente).

► *Negazioni di alcuni tipi di proposizione.* Se una proposizione $\boldsymbol{P}$ esprime una proprietà di elementi x variabili in un insieme assegnato X, scriveremo $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(x)$. Diremo che $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(x)$ è vera su un insieme $X' \subseteq X$, se $\boldsymbol{P}(x)$ è vera per ogni $x \in X'$.

Pertanto *la negazione della proposizione*

$$\text{“}\forall x \in X' : \ \boldsymbol{P}(x)\text{”}$$

è (logicamente equivalente al)la proposizione:

$$\text{“}\exists x \in X' : \ \neg \boldsymbol{P}(x)\text{”},$$

(cioè, esiste (almeno) un elemento $x \in X'$, per il quale $\boldsymbol{P}(x)$ è falsa).

Simmetricamente, *la negazione della proposizione*

$$\text{“}\exists x \in X' : \ \boldsymbol{P}(x)\text{”},$$

è (logicamente equivalente al)la proposizione:

$$\text{“}\forall x \in X' : \ \neg \boldsymbol{P}(x)\text{”}$$

(cioè, per tutti gli elementi $x \in X'$, $\boldsymbol{P}(x)$ è falsa).

Date due proposizioni $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ si può facilmente verificare sviluppando le tavole di verità che:
• *la negazione della proposizione* $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ (cioè, $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$) è (logicamente equivalente al)la proposizione $(\neg \boldsymbol{P}) \vee (\neg \boldsymbol{Q})$;
• *la negazione della proposizione* $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ (cioè, $\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$) è (logicamente equivalente al)la proposizione $(\neg \boldsymbol{P}) \wedge (\neg \boldsymbol{Q})$.

Esempi.

(1) Sia X l'insieme di tutti gli esseri umani, allora la negazione della proposizione

"tutti gli esseri umani sono mortali" (in simboli, "$\forall x \in X,\ x$ è mortale")

è (logicamente equivalente al)la proposizione

"esiste un essere umano che non è mortale" (in simboli, "$\exists x \in X,\ x$ non è mortale)".

(2) Sia X l'insieme di tutte le monete circolanti, allora la negazione della proposizione

"esiste in circolazione una moneta d'argento" (in simboli, "$\exists x \in X,\ x$ è d'argento")

è (logicamente equivalente al)la proposizione

"tutte le monete in circolazione non sono d'argento" (in simboli, "$\forall x \in X,\ x$ non è d'argento)".

(3) La negazione della proposizione *"Antonio è bello ed intelligente"* è (logicamente equivalente al)la proposizione *"Antonio non è bello o/e non è intelligente"*.

(4) La negazione della proposizione *"Beatrice si reca a scuola in bicicletta o* (nel senso o/e) *in autobus"* è (logicamente equivalente al)la proposizione *"Beatrice non si reca a scuola né in bicicletta né in autobus"*.

3. Prime operazioni tra insiemi

Passiamo, ora, a definire alcune operazioni che assumeremo che diano luogo a dei nuovi insiemi (a partire da insiemi dati).

► Se A e B sono due insiemi, si definisce *l'intersezione di A con B,* in simboli $A \cap B$, l'insieme di tutti gli elementi comuni ad A e B:

$$A \cap B := \{x \ : \ x \in A \wedge x \in B\}\,.$$

Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$ (cioè, se A e B non hanno elementi in comune).

► Si definisce *l'unione di A con B,* in simboli $A \cup B$, l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad A, a B od ad entrambi:

$$A \cup B := \{x \ : \ x \in A \vee x \in B\}\,.$$

Ad esempio, nel caso in cui $A := \{x : \boldsymbol{P}(x)\}$ e $B := \{x : \boldsymbol{Q}(x)\}$ siano definiti tramite le proprietà caratteristiche $\boldsymbol{P}(x)$ e $\boldsymbol{Q}(x)$, allora:

$$A \cap B := \{x \ : \ \boldsymbol{P}(x) \wedge \boldsymbol{Q}(x)\}\,; \quad A \cup B := \{x \ : \ \boldsymbol{P}(x) \vee \boldsymbol{Q}(x)\}\,.$$

► Se A e B sono due sottoinsiemi di un medesimo insieme X si definisce *insieme differenza di A meno B* l'insieme:

$$A \setminus B := \{x \in X \ : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B)\,.$$

In particolare, si dice *insieme complementare di A in X* l'insieme $X \setminus A$.

► Dato da un insieme A, si dice *insieme delle parti di A,*denotato con $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, cioè:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \ : \ B \subseteq A\}\,.$$

Esempi

Se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ ed $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, allora:

$$A \cap B = \{3\}\,; \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}\,; \quad A \setminus B = \{1, 2\}\,; \quad X \setminus A = \{4, 5\}\,,$$

$$\mathcal{P}(A) = \boldsymbol{\{}\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\boldsymbol{\}}\,.$$