Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Seconda prova di valutazione intermedia
7 gennaio 2013

*Cognome*____________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. **(2 pt)** Determinare tutte le eventuali soluzioni distinte della seguente congruenza lineare:

$$102X \equiv 150 \pmod{252}$$

2. **(4 pt)**

(a) Determinare tutte le soluzioni non congruenti mod 20 del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 9 \pmod{12} \\ 4X \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$$

(b) Sia a una soluzione del sistema. Verificare che $[a]_{20} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$.

(c) Determinare l'ordine di $[a]_{20}$ come elemento del gruppo moltiplicativo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$.

(d) Stabilire se il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$ è ciclico oppure no.

3. **(4 pt)** Nell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x < 196 \ \text{ e } x \text{ divide } 196\}$ si consideri la seguente relazione d'ordine:

$$x \trianglelefteq y \iff x \text{ divide } y$$

(a) Stabilire se l'insieme ordinato $(A, \trianglelefteq)$ è ordinato totalmente.

(b) Determinare gli elementi massimali di $(A, \trianglelefteq)$.

(c) Determinare gli elementi minimali di $(A, \trianglelefteq)$.

(d) Rappresentare l'insieme ordinato $(A, \trianglelefteq)$ tramite un diagramma lineare (o di Hasse).

4. **(4 pt)** Nell'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo, per ogni $(a,b),\ (a',b') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$(a,b) \star (a',b') = (aa', ab' + b)$$

   (a) Stabilire se $\star$ è associativa.
   (b) Stabilire se $\star$ è commutativa.
   (c) Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a $\star$.
   (d) Stabilire se $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \star)$ è un gruppo.
   (e) Provare per induzione che per ogni numero naturale positivo n si ha che:

$$(1,b)^n = (1,nb) \qquad \text{e} \qquad (a,0)^n = (a^n, 0)$$

   per ogni $a,b \in \mathbb{R}$.

5. **(4 pt)** Sia $\sigma := (8214) \circ (678) \circ (47561) \circ (3752) \in S_8$.

   (a) Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti, determinarne l'ordine e la parità.

   (b) Sia $\tau := (2468) \in S_8$. Calcolare $(\sigma \circ \tau)^{-1}$.

6. **(6 pt)** Si considerino i seguenti anelli:

(a) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$;

(b) $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$;

(c) $(\mathbb{Z}_7[X], +, \cdot)$;

(d) $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$;

(e) $\big(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\big)$, con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$\forall x \in \mathbb{Z}, \ \ \forall f, g \in Z^{\mathbb{Z}}$.

i) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

ii) Per ciascuno degli anelli dati, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili.

7. **(6 pt)**

(a) Decomporre il polinomio $f(X) = 3X^4 - 6X^2 - 6 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decomporre il polinomio $g(X) = X^8 - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Decomporre il polinomio $h(X) = X^5 + X^4 + X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{2}X + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_5[X]$.