Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Prima prova di valutazione intermedia
29 ottobre 2012

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.
L'esercizio 7 è facoltativo e verrà valutato solo nel caso in cui nei primi sei esercizi verrà conseguito un punteggio maggiore od uguale a 18.

1. **[Punti 3]** Siano **P** e **Q** proposizioni; scrivere la tabella di verità della seguente proposizione:

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \neg(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$$

2. **[Punti 6]** Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

   (a) per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}).$$

   (b) per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$(3!)^n \text{ divide } (3n)! \text{ in } \mathbb{Z}$$

   cioè esiste un numero intero α_n tale che $(3!)^n\alpha_n = (3n)!$

3. **[Punti 6]** Nell'insieme $X = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$ si consideri la seguente relazione:

$$a\rho b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\mid a+3 \mid} = \frac{1}{\mid b+3 \mid}$$

(a) Verificare che ρ è una relazione d'equivalenza su X.

(b) Trovare $[-\frac{1}{2}]_\rho$, $[\frac{7}{3}]_\rho$ e $[a]_\rho$ per ogni $a \in X$.

(c) Definire una applicazione **suriettiva** f di dominio X la cui relazione nucleo coincida con ρ ed esplicitare $f^\star$.

4. **[Punti 6]** Si consideri l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

definita da:

$$f\big((a,b)\big) = (a^2, ab)$$

per ogni $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) Stabilire se f è iniettiva.

(b) Trovare $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Sia $X = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; trovare $f(X)$.

(d) Sia $Y = \{(2,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$; trovare $f^{-1}(Y)$.

(e) Descrivere le classi di equivalenza di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto alla relazione nucleo di f.

5. **[Punti 6]** Si considerino le seguenti equazioni diofantee; stabilire quali hanno soluzioni intere, e, in caso positivo, determinare tutte le soluzioni intere:

   (a) $237X + 114Y = -21$

   (b) $205X - 15Y = 55$

6. **[Punti 3]** Siano p e q numeri primi tali che $p \geqslant q \geqslant 5$. Provare che

$$24 \mid p^2 - q^2$$

7. **Questo esercizio è facoltativo e verrà valutato solo nel caso in cui nei primi sei esercizi verrà conseguito un punteggio maggiore od uguale a 18.**

   Si considerino i numeri di Fibonacci definiti da:

$$u_1 = u_2 = 1 \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad \text{per } \ n \geqslant 3$$

   (a) Provare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha che $\mathrm{MCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.

   (b) Provare che per $n \geqslant 1$ si ha che

$$2^{n-1} u_n \equiv n \pmod 5$$