Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.6 - 21 Novembre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Si consideri su $\mathbb{C}$ la relazione binaria $\mathfrak{R}$ definita ponendo per ogni coppia di numeri complessi $a+ib$, $c+id$:

$$(a+ib)\,\mathfrak{R}\,(c+id) \;\Leftrightarrow\; (a+ib=c+id) \;\vee\; (a^2+b^2<c^2+d^2).$$

(i) Provare che $(\mathbb{C},\, \mathfrak{R})$ è un insieme ordinato non totalmente.

(ii) Caratterizzare i numeri complessi non confrontabili con $\mathfrak{R}$.

(iii) Determinare, se esistono, gli elementi massimali, gli elementi minimali, il massimo ed il minimo in $(\mathbb{C},\, \mathfrak{R})$.

(iv) Determinare, se esistono, gli elementi massimali, gli elementi minimali, il massimo ed il minimo nei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ ordinati secondo le rispettive restrizioni di $\mathfrak{R}$:

   (a) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$;
   (b) $\mathbb{R}$;
   (c) C_4 (l'insieme delle radici quarte dell'unità);
   (d) $\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{N},\ a\neq 0 \ \vee\ b\neq 0\}$.

(v) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore in $\mathbb{C}$ dei seguenti sottoinsiemi di $(\mathbb{C},\, \mathfrak{R})$:

   (a) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$;
   (b) $\mathbb{R}$;
   (c) $\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{N},\ a\neq 0 \ \vee\ b\neq 0\}$.

Esercizio 2. Siano $(X,\, \leqslant_X)$ ed $(Y,\, \leqslant_Y)$ due insiemi ordinati. Si considerino sul prodotto cartesiano $X\times Y$ le relazioni binarie $\leqslant_{pc}$ e $\leqslant_{lex}$ definite nel seguente modo:

$$(x_1,\, y_1) \leqslant_{pc} (x_2,\, y_2) \quad\Leftrightarrow\quad (x_1 \leqslant_X x_2) \;\wedge\; (y_1 \leqslant_Y y_2)$$

e

$$(x_1,\, y_1) \leqslant_{lex} (x_2,\, y_2) \quad\Leftrightarrow\quad (x_1 <_X x_2) \;\vee\; ((x_1=x_2)\wedge(y_1 \leqslant_Y y_2)).$$

(i) Provare che se $(x_1,\, y_1) \leqslant_{pc} (x_2,\, y_2)$ allora $(x_1,\, y_1) \leqslant_{lex} (x_2,\, y_2)$, per ogni $x_1,\, x_2 \in X$ e per ogni $y_1,\, y_2\in Y$. È vero in generale il viceversa?

(ii) Provare che $\leqslant_{pc}$ è una relazione d'ordine su $X\times Y$ (chiamata *ordine prodotto cartesiano* o *naturale*).

(iii) Provare che $\leqslant_{lex}$ è una relazione d'ordine su $X \times Y$ (chiamata *ordine lessicografico*).

(iv) Provare che $\leqslant_{lex}$ è totale se $\leqslant_X$ e $\leqslant_Y$ sono totali.

(v) Provare che $\leqslant_{pc}$ non è totale se X ed Y hanno entrambi più di un elemento.

Esercizio 3. Sia $(X, \leqslant)$ un insieme ordinato. Nell'insieme X^X delle applicazioni di X in sé, si consideri la relazione binaria $\mathfrak{R}$, definita ponendo $f \mathfrak{R} g$ se e solo se $f(x) \leqslant g(x)$, per ogni $x \in X$. Provare che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'ordine. Dimostrare inoltre che $\mathfrak{R}$ risulta totale se e solo se X è costituito da un solo elemento.

Esercizio 4. Rappresentare il diagramma lineare dei divisori positivi di 60.

Esercizio 5. Siano S e T insiemi non vuoti. Nell'insieme T^S delle applicazioni di S in T si consideri la relazione binaria $\mathfrak{R}$, definita ponendo $f \mathfrak{R} g$ se e solo se $f = g$ oppure $f(S) \subset g(S)$. Provare che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'ordine. Stabilire sotto quali condizioni su S e T essa è totale. Determinare, se esistono, tutti gli elementi minimali e quelli massimali di T^S.