

Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.4 - 25 Ottobre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Calcolare $(1+i)^{86}$.

Esercizio 2. Calcolare le radici quarte dell'unità in \mathbb{C} .

Esercizio 3. Calcolare le radici seste dell'unità in \mathbb{C} .

Esercizio 4. Calcolare le radici ottave dell'unità in \mathbb{C} .

Esercizio 5. Calcolare le radici terze di $2i$ in \mathbb{C} .

Esercizio 6. Trovare i numeri complessi z tali che:

(i) $z^2 + z + 1 = 0$;

(ii) $z^2 + i\bar{z} = 1$;

(iii) $z^3 = |z^2|$;

(iv) $z^6 + z^3 + 1 = 0$;

(v) $z^3|z^2| - \bar{z}^2 = 0$.

Esercizio 7. Sia $z \in \mathbb{C}$. Verificare che se $|z| = 1$, si ha che $\left| \frac{3z-i}{3+iz} \right| = 1$.

Esercizio 8. Trovare tutte le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tali che $\bar{z}^2 - w^2 = -1$ e $z - \bar{w}^2 = 0$.

Esercizio 9. (i) Dimostrare non esiste alcun numero complesso z della forma ai , con $a \in \mathbb{R}$, tale che $\bar{z} + z = |z|^2 + 1$.

(ii) Trovare i numeri complessi z per cui $\bar{z} + z = |z|^2 + 1$.

Esercizio 10. Si consideri l'equazione diofantea

$$\alpha X + (\alpha + 1)Y = 2012. \quad (*_{\alpha})$$

(i) Decidere della risolubilità di $(*_{\alpha})$ al variare di $\alpha \in \mathbb{Z}$.

(ii) Provare che per ogni $m \in \mathbb{Z}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}$ esiste una coppia (x_0, y_0) , soluzione di $(*_{\alpha})$, tale che $m = x_0 + y_0$.