Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
AL110 - Algebra 1
Esercitazione n.5 - 14 Novembre 2012
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Per $n = 3, 4, 6, 8$, calcolare le radici n-sime dell'unità in $\mathbb{C}$. Determinare l'ordine di ciascuna di esse e selezionare quelle che sono primitive.

Esercizio 2. Siano m, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $m \mid n$. Provare che $C_m \subseteq C_n$.

Esercizio 3. Determinarne l'ordine di ciscuna delle seguenti radici dell'unità:

(i) $\zeta = -1$;

(ii) $\zeta = -i$;

(iii) $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(iv) $\zeta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(v) $\zeta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(vi) $\zeta = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Esercizio 4. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice dell'unità. Sia $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\zeta^m = 1$. Provare che l'ordine di ζ divide m.

Esercizio 5. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Siano ζ, $\eta \in \mathbb{C}_n$. Provare che $\zeta\eta \in C_n$ e che $\zeta^{-1} \in C_n$.

Esercizio 6. Sia $X \neq \emptyset$ un insieme. Provare che la relazione di inclusione $\subseteq$ definita in $\mathcal{P}(X)$ è una relazione d'ordine. Dimostrare che essa è d'ordine totale se e solo se X ha un solo elemento.

Esercizio 7. Sia $X \neq \emptyset$ un insieme. Determinare, se esistono, gli elementi massimali, gli elementi minimali, il massimo ed il minimo dei seguenti insiemi ordinati:

(i) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$;

(ii) $(\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$;

(iii) $(\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}, \subseteq)$.

Esercizio 8. Determinare un sottoinsieme di $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ che non ammette estremo superiore.

Esercizio 9. La relazione di divisibilità tra numeri naturali è una relazione d'ordine? È totale? Cosa si può dire della relazione di divisibilità tra numeri interi?

Esercizio 10. Determinare, se esistono, gli elementi massimali, gli elementi minimali, il massimo ed il minimo negli insiemi ordinati $(\mathbb{N}, |)$ ed $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$.

Esercizio 11. Determinare, se esistono, gli elementi massimali, gli elementi minimali, il massimo ed il minimo nell'insieme ordinato $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore del sottoinsieme $\{a, b\}$, dove a, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 12. Dimostrare che se un insieme ordinato ammette minimo (o massimo) questo è unico.

Esercizio 13. Dimostrare che in un insieme ordinato $(X, \leqslant)$ il minimo, se esiste, è un elemento minimale. Vale in generale il viceversa? Provare che il viceversa è vero se si aggiunge l'ipotesi che $\leqslant$ sia totale.

Esercizio 14. Sia $(X, \leqslant)$ un insieme (pre)ordinato. Sia Y un sottoinsieme di X. Si definisca su Y la relazione binaria $\leqslant_Y$, detta restrizione di $\leqslant$ ad Y, definita nel seguente modo:

$$\forall\, y,\, y' \in Y, \quad y \leqslant_Y y' \;\Leftrightarrow\; y \leqslant y'.$$

Provare che $(Y, \leqslant_Y)$ è un insieme (pre)ordinato e che se $\leqslant$ è totale, allora anche $\leqslant_Y$ è totale.

Esercizio 15. Tracciare il diagramma lineare dell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Esercizio 16. Tracciare il diagramma lineare dell'insieme $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ordinato secondo la relazione di divisibilità. Esibire le catene di X. Determinare, se esistono, gli elementi minimali, gli elementi massimali, il massimo ed il minimo di X. Tovare, se esistono, $\sup_X(\{2, 3\})$ ed $\inf_X(\{2, 3\})$.

Esercizio 17. Sia $X \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$. Su X si definisca la relazione:

$$\forall\, Y, Z \in X : \quad Y \leqslant Z \quad \Leftrightarrow \quad (Y = Z) \;\vee\; (y \mid z \;\; \forall y \in Y, \forall z \in Z).$$

(i) Provare che $\leqslant$ è una relazione d'ordine su X e stabilire se è totale.

(ii) Si determinino, se esistono, il minimo ed il massimo di X.

(iii) Determinare, se esiste, una catena infinita di X.

(iv) Stabilire se esistono l'estremo superiore od il massimo dei seguenti sottoinsiemi di X: $Y_1 = \{\{2, 4\}, \{12\}, \{5, 7\}\}$ ed $Y_2 = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$.

(v) Sia $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$. Provare che $R \overset{\text{def}}{=} \{rk \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$ è un elemento massimale di $(X, \leqslant)$.

(vi) Stabilire se ogni elemento massimale di X si può scrivere come nel punto precedente.