Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2012/2013
AL110 - Algebra 1
Appello A
22 Gennaio 2013

*Cognome*____________________ *Nome*__________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. **(4pt)**

   (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geqslant 2$ si ha :

   $$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

   (b) Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha che 27 divide $2^{5n+1}+5^{n+2}$.

2. **(5 pt)** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2} & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ -1 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

(b) Descrivere $\mathtt{Im}(f)$.

(c) Sia ρ_f la relazione nucleo di f. Descrivere $[-7]_{\rho_f}$, $[0]_{\rho_f}$ e $[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{\rho_f}$.

3. **(6 pt)**

(a) Provare che per ogni numero naturale positivo n esistono e sono univocamente determinati $r, s \in \mathbb{N}$ tali che $n = 2^r(2s+1)$.

(b) Si consideri in $\mathbb{N}^+$ la seguente relazione ρ:

$$(2^r(2s+1))\,\rho\,(2^u(2v+1)) \Longleftrightarrow r = u$$

i. Verificare che ρ è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}^+$.

ii. Descrivere $[5]_\rho$, $[14]_\rho$ e $[12]_\rho$.

iii. Descrivere la partizione di $\mathbb{N}^+$ associata alla relazione d'equivalenza ρ.

iv. Trovare una applicazione f di dominio $\mathbb{N}^+$ tale che la relazione nucleo di f coincide con ρ.

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

4. **(5 pt)** Si consideri l'insieme $X = \{2, 3, 6\}$. Sia $\mathrm{Ord}(X)$ l'insieme di tutte le relazioni d'ordine definite su X. Si definisca su $\mathrm{Ord}(X)$ la relazione binaria $\trianglelefteq$ nel seguente modo: date due relazioni d'ordine $\leqslant_1$ e $\leqslant_2$ su X si ponga

$$\leqslant_1 \ \trianglelefteq \ \leqslant_2 \iff \forall\, x, y \in X : \ (x \leqslant_1 y) \Rightarrow \ (x \leqslant_2 y).$$

   (a) Sia $\leqslant \ = \{(2, 2); (3, 3); (6, 6); (6, 3)\} \in \mathrm{Ord}(X)$. Rappresentare il diagramma lineare (di Hasse) di $\leqslant$ e determinare due ordinamenti di X, $\leqslant_1$ e $\leqslant_2$, tali che $\leqslant_1 \ \lhd \ \leqslant \ \lhd \ \leqslant_2$.

   (b) Provare che $(\mathrm{Ord}(X), \trianglelefteq)$ un insieme ordinato.

   (c) Stabilire se $\trianglelefteq$ un ordinamento totale su $\mathrm{Ord}(X)$.

   (d) Sia $\leqslant$ un ordinamento totale su X. Provare che $\leqslant$ è un elemento massimale in $\mathrm{Ord}(X)$.

   (e) Provare che $\mathrm{Ord}(X)$ ammette minimo.

5. **(5pt +2pt Fac)** Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario con $1_A \neq 0_A$. Nell'insieme A si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo, per ogni $a, b \in A$,

$$a \star b = a + b - ab$$

   (a) Provare che $\star$ è associativa.

   (b) Stabilire se esiste in A un elemento neutro rispetto a $\star$.

   (c) Stabilire se $(A, \star)$ è un gruppo.

   (d) Sia $G = \{a \in A \mid \text{ esiste } b \in A \text{ tale che } a + b - ab = 0_A\}$.

      i. **(FAC.)** Verificare che G è chiuso rispetto all'operazione $\star$.

      ii. Verificare che $(G, \star)$ è un gruppo.

   (e) Si consideri l'anello $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

      i. Descrivere gli elementi del gruppo $(G, \star)$.

      ii. Determinare l'ordine di ciascuno degli elementi di $(G, \star)$.

6. **(5 pt)**

(a) Decomporre il polinomio $f(X) = 2X^4 + X^3 + 7X^2 + 5X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Decomporre il polinomio $g(X) = X^6 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Decomporre il polinomio $h(X) = X^4 + \overline{3}X^3 - \overline{2}X^2 - \overline{2}X + \overline{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$.