

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/200912**  
**TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri**  
**Tutorato 2 (19 marzo 2009)**  
**Giacomo Milizia**

1. Si consideri l'equazione diofantea:

$$4(\lambda - 5)X + 125Y = 60.$$

- (a) Determinare per quali valori del parametro  $\lambda \in \mathbb{Z}$  l'equazione è risolvibile.
- (b) Determinare esplicitamente le soluzioni dell'equazione data per  $\lambda = 31$ .
2. Stabilire per quali valori del parametro  $\lambda$  il seguente sistema di congruenze lineari ammette una unica soluzione:

$$\begin{cases} \lambda^2 X + Y \equiv 5 \pmod{7} \\ 4X + Y \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

3. Studiare la risolubilità del seguente sistema di congruenze lineari al variare del parametro  $\lambda$ :

$$\begin{cases} Y + \lambda Z \equiv \lambda + 1 \pmod{5} \\ X + Y + Z \equiv 2 \pmod{5} \\ \lambda X + Y \equiv \lambda + 1 \pmod{5} \end{cases}$$

4. Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 2X + 3Y + 6Z \equiv -1 \pmod{7} \\ 2X - Y \equiv -3 \pmod{7} \end{cases}$$

5. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 51X^3 + 35X^2 + 21X + 36 \equiv 0 \pmod{189}.$$

6. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:

- (a)  $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{243}$ ;
- (b)  $X^2 - 3X + 2 \equiv 0 \pmod{243}$ ;
- (c)  $X^3 + 1 \equiv 0 \pmod{28}$ .

7. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:

(a)  $X^2 + 5X + 4 \equiv 0 \pmod{49}$ ;

(b)  $X^3 + 4X^2 + 19X + 1 \equiv 0 \pmod{125}$ ;

(c)  $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{8}$ ;

(d)  $X^{18} + 4X^{14} + 3X + 10 \equiv 0 \pmod{21}$ .

8. Determinare il numero di soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^7 + X + 1 \equiv 0 \pmod{343}$$