Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Studi in Matematica, A.A. 2008/2009

TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri

28 aprile 2009

1. *(Primo Esonero TN1 - 11 aprile 2008).* Un numero naturale si dice *perfetto* se $\sigma(n) = 2n$.

   Provare che:

   a) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$, è primo, allora s è primo (un numero di questa forma si dice primo di Mersenne).

   b) Se $2^s - 1$ con $s \in \mathbb{Z}$, $s > 1$ è primo, allora $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$ è perfetto.

   c) Se n è un numero perfetto pari, allora n è della forma $2^{s-1}(2^s - 1)$, con $s > 1$ e $2^s - 1$ primo.

2. Si dimostri che la funzione μ di Möbius è moltiplicativa, ma non totalmente moltiplicativa. Si dimostri, inoltre, che

$$(\mu * \mathbf{1})(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}, \qquad \text{dove } \mathbf{1}(n) = 1 \ \ \forall\, n.$$

3. Si dimostri che, per ogni f, g, h funzioni aritmetiche, valgono le seguenti affermazioni:

   a) $f * g = g * f$;

   b) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

   c) $f * u = f = u * f$, dove $u = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$;

   d) se $f(1) \neq 0$ e definiamo ricorsivamente:

$$f^{-1}(n) := \begin{cases} \frac{1}{f(1)} & n = 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \left[f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \right] & n \geq 1 \end{cases},$$

   allora $f * f^{-1} = u = f^{-1} * f$.

4. Si dimostri che se f e g sono funzioni moltiplicative, allora è tale anche il loro prodotto di Dirichlet $f * g$.

5. Mostrare che valgono le seguenti uguaglianze::

   a) $\mu^{-1} = \mathbf{1}$;

   b) $e = \varphi * \mathbf{1}$;

   c) $\varphi = e * \mu$;

   d) $\mathbf{1} = \tau * \mu$;

   e) $e = \sigma * \mu$;

6. Sia $f(n) := \big|\{p \text{ primo} \mid p|n\}\big|$. Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la funzione $g_z(n) := z^{f(n)}$ è moltiplicativa.

   Calcolare inoltre $(g_i * \mu)(28)$ e $(g_i * \mu)(60)$.