Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Studi in Matematica, A.A. 2008/2009

TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri

12 maggio 2009

1. Sia f una funzione totalmente moltiplicativa non identicamente nulla. Mostrare che $f^{-1} = \mu f$, dove $(\mu f)(n) := \mu(n) f(n)$ per ogni $n \geq 1$.

2. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

   (a) $e^{-1} = \mu e$;

   (b) $\tau^{-1} = \mu * \mu$;

   (c) $\sigma^{-1} = \mu e * \mu$;

   (d) $\varphi^{-1} = \mu e * \mathbf{1}$.

3. Sia f una funzione moltiplicativa non identicamente nulla. Dimostrare che:

   (a) $\mu f * \mathbf{1}$ è una funzione moltiplicativa;

   (b) Se $n = p_1^{h_1} \dots p_r^{h_r}$ allora:

   $$(\mu f * \mathbf{1})(n) = \prod_{i=1}^{r} \big(1 - f(p_i)\big).$$

   Dedurne una scrittura per φ^{-1}.

4. Siano

   $$A := \big\{ f \mid f \text{ aritmetica con } f(1) \neq 0 \big\}$$
   $$M := \big\{ f \mid f \text{ moltiplicativa con } f(1) \neq 0 \big\}.$$

   Dimostare che

   (a) se $f, g \in A$ e $f, f * g \in M$, allora anche $g \in M$;

   (b) $(M, *)$ è un sottogruppo di $(A, *)$.

5. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \sigma * \varphi$.

   (a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.

(b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.

6. Sia λ la funzione di *Liouville*, definita nel modo seguente:

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ & \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{r} h_i} & \text{se } n > 1 \text{ e } n = p_1^{h_1} \dots p_r^{h_r} \end{cases} .$$

Mostrare che:

(a) λ è totalmente moltiplicativa;

(b) $\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato} \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$;

(c) $\lambda^{-1} = \mu\lambda = |\mu|$;

(d) $\sum_{d|n} \lambda^{-1}(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ & \\ 2^r & \text{se } n > 1 \text{ e } n = p_1^{h_1} \dots p_r^{h_r} \end{cases}$.