Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 9 (28 novembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Stabilire quali dei seguenti insiemi dotati di una operazione sono gruppi:
   (a) $\mathbb{Z}$ con la sottrazione;
   (b) $\mathbb{Z}$ con la moltiplicazione;
   (c) $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$ con la moltiplicazione;
   (d) $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$ con la divisione;
   (e) l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi con la moltiplicazione;
   (f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'operazione $\diamond$ definita da $(a, b) \diamond (c, d) = (a, d)$.

2. Stabilire l'ordine dei seguenti elementi nei rispettivi gruppi:
   (a) $[5]_{20} \in \mathbb{Z}_{20}$;
   (b) $[7]_{20} \in U(\mathbb{Z}_{20})$;
   (c) $8 \in \mathbb{Z}$;
   (d) $i \in \mathbb{C}$;
   (e) $i \in \mathbb{C}^\star = \mathbb{C} - \{0\}$;
   (f) $(326)(21) \in S_6$.

3. Nel gruppo delle biiezioni di $\mathbb{R}^2$ si considerino gli elementi f e g definiti nel seguente modo: per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$f((x, y)) = (-x, -y) \qquad\qquad g((x, y)) = (2 - x, 2 - y).$$

   Determinare l'ordine di f, g e $g \circ f$.

4. Stabilire quali dei seguenti insiemi dotati di due operazioni sono anelli:
   (a) $7\mathbb{Z}$ con le usuali addizione e moltiplicazione;
   (b) l'insieme $\mathbb{R}^\star$ dei numeri reali non nulli con l'operazione di moltiplicazione e con l'operazione $\circ$ definita da $a \circ b = 1$;

5. Calcolare $4a$ e a^4 per gli elementi a dei seguenti anelli:
   (a) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$;
   (b) $[2]_{16} \in \mathbb{Z}_{16}$;
   (c) $[2]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

6. Determinare la caratteristica di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}_{31}$.

7. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottoanelli:
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \;\mid\; a, b \in \mathbb{Z}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{Q}$;
   (b) $\{q \in \mathbb{Q} \;\mid\; q = \frac{a}{b},\; a, b \in \mathbb{Z},\; b \text{ dispari}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{Q}$;

8. Stabilire quali dei seguenti anelli commutativi unitari sono domini (d'integrità):
   (a) $\mathbb{Z}_{19}$;
   (b) $\mathbb{Z}_{24}$;
   (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'addizione e la moltiplicazione definite da:
   $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd);$$
   (d) $\mathbb{R}^{[0,1]}$;
   (e) il sottoanello di $\mathbb{R}^{[0,1]}$ formato dalle funzioni continue.

9. Si consideri l'anello commutativo
   $$F = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$
   dove 0 è l'elemento neutro additivo, 1 è l'elemento neutro moltiplicativo, $x + x = 0$ per ogni $x \in F$ e $\alpha^2 = \alpha + 1$.
   (a) Scrivere la tabella additiva e quella moltiplicativa di F.
   (b) Verificare che F è un campo.
   (c) Deterinare la caratteristica di F.