Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 10 (5 dicembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Sia $h(X) = [3]X^4 + [2]X^3 + [4]X + [2] \in \mathbb{Z}_5[X]$. Elencare i polinomi di $\mathbb{Z}_5[X]$ associati ad $h(X)$.

2. Si determini il polinomio monico associato ad:
   (a) $g(X) = -\frac{6}{11}X^8 - 34X + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[X]$;
   (b) $g(X) = [3]X^7 - [4]X^5 + [2]X \in \mathbb{Z}_5[X]$;
   (c) $g(X) = [10]X^8 - [4]X^6 + [1] \in \mathbb{Z}_{11}[X]$.

3. Calcolare il quoziente ed il resto della divisione euclidea delle seguenti coppie di polinomi:
   (a) $f(X) = 2X^4 + 5X^2 + \frac{3}{5}, \quad g(X) = 3X^2 - X + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[X]$;
   (b) $f(X) = 2X^3 + 5X^2 + 7X - 8, \quad g(X) = -X^2 - 7X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$;
   (c) $f(X) = X^3 + X^2 + X, \quad g(X) = -X^2 - X + [1] \in \mathbb{Z}_2[X]$;
   (d) $f(X) = [2]X^3+[5]X^2+[4]X-[6], \quad g(X) = [6]X^2-[2]X+[4] \in \mathbb{Z}_7[X]$.

4. Costruire un polinomio $f(X)$ di $\mathbb{Z}_2$ tale che $f(0) = a$, $f(1) = b$, per ogni coppia (a, b) di elementi di $\mathbb{Z}_2$. Dedurre che ogni applicazione da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è polinomiale.

5. Costruire un polinomio $f(X)$ di $\mathbb{Z}_3$ tale che $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

6. Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il MCD ed una identitá di Bézout per le seguenti coppie di polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:
   (a) $f(X) = X^4 + 2X^3 - 5X^2 - 4X + 6, \quad g(X) = 2X^2 + 5X + 4$;
   (b) $f(X) = X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g(X) = X^3 - 3X^2 + X - 1$.

7. Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il MCD ed una identitá di Bézout per i seguenti polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$:
$$f(X) = X^4 + [2]X^3 - [5]X^2 - [4]X + [6], \quad g(X) = [2]X^2 + [5]X + [4]$$

8. Determinare le radici intere e razionali dei seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X]$:
   (a) $f(X) = 2X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 7X + 6$
   (b) $g(X) = 3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$.

9. Si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Q}[X]$:
$$f_n(X) = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$
   (a) Calcolare $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$.
   (b) Utilizzando il punto (a), fare una ipotesi su $f_n(X)$, con $n \geq 1$, e provarla.