UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
5 novembre 2005

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri e appunti.

1. **(5 pt)** Siano **P** e **Q** proposizioni; provare che:

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \mathbf{P}) \vee \mathbf{Q}$$

2. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

   (a) Determinare $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) Descrivere la relazione nucleo di f, $\equiv_f$.

   (c) Determinare $\mathbb{R}/\equiv_f$.

3. **(5 pt)**

   (a) Usando l'Algoritmo Euclideo delle divisioni successive, calcolare il MCD$(2525, 745)$ ed una identità di Bézout.

   (b) Provare che il MCD(a, b) divide $a - b$.

   (c) Utilizzando il punto (b), trovare il MCD$(1863, 1866)$ e il MCD$(1861, 1865)$.

4. **(6 pt)**

(a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

(b) Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definita induttivamente come segue:

$$a_1 = 5, \; a_2 = 7 \text{ e, per ogni } n \geq 3, \; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Provare che $a_n = 3 + 2^n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$.

5. **(5 pt)** Sia p un numero primo > 3 tale che $p+2$ è primo. Provare che 12 divide $p+(p+2)$.

6. **(5 pt)** Stabilire quali dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}/\equiv_n$ sono zero-divisori e quali sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

$$[-31]_6,\ [-15]_9,\ [43]_{49},\ [48]_{21}$$