UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
Soluzione
5 novembre 2001

1. **(5 pt)** Siano **P** e **Q** proposizioni; provare che:

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \mathbf{P}) \vee \mathbf{Q}$$

Soluzione

Ricordiamo le tabelle di verità di $\Rightarrow$, $\neg$ e $\vee$.

Date P e Q due proposizioni si ha che:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Segue che:

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Quindi $P \Rightarrow Q$ e $(\neg P) \vee Q$ hanno la stessa tabella delle verità, quindi sono equivalenti.

2. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

   (a) Determinare $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) Descrivere la relazione nucleo di f, $\equiv_f$.

   (c) Determinare $\mathbb{R}/\equiv_f$.

   Soluzione

   Osserviamo che

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$$

   (a)

$$\begin{aligned} \texttt{Im}\, f &= \left\{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) = 2(x-1)^2 \text{ per qualche } x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \} . \end{aligned}$$

   (b) Ricordiamo che la relazione nucleo associata ad f è definita da

$$\begin{aligned} x \equiv_f y &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 2(y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow |x-1| = |y-1| \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ o } y = -x + 2. \end{aligned}$$

   Quindi

$$x \equiv_f y \Leftrightarrow y = x \text{ o } y = -x + 2$$

   (c) Cominciamo col descrivere la classe associata ad un elemento $x \in \mathbb{R}$,

$$[x]_{\equiv_f} = \{x, -x + 2\}$$

   Quindi possiamo scegliere un rappresentante della classe di x nell'insieme $[1, \infty)$, ne segue che:

$$\mathbb{R}/\equiv_f = \left\{ [x]_{\equiv_f, x \in \mathbb{R}} \right\} \cong [1, +\infty) \cong \texttt{Im}\, f.$$

3. **(5 pt)**

(a) Usando l'Algoritmo Euclideo delle divisioni successive, calcolare il MCD(2525, 745) ed una identità di Bézout.

(b) Provare che il MCD(a, b) divide $a - b$.

(c) Utilizzando il punto (b), trovare il MCD(1863, 1866) e il MCD(1861, 1865).

Soluzione

(a) Utilizzando l'algoritmo euclideo otteniamo

$$
\begin{aligned}
2525 &= 745 \times 3 + 290 \\
745 &= 290 \times 2 + 165 \\
290 &= 165 \times 1 + 125 \\
165 &= 125 \times 1 + 40 \\
125 &= 40 \times 3 + 5 \\
40 &= 5 \times 8 + 0
\end{aligned}
$$

Quindi $\texttt{MCD}(2525, 745) = 5$. Per ottenere l'identità di Bézout sostituiamo successivamente le equazioni precedenti

$$
\begin{aligned}
5 &= 125 - 40 \times 3 \\
40 &= 165 - 125 \times 1 \\
125 &= 290 - 165 \times 1 \\
165 &= 745 - 290 \times 2 \\
290 &= 2525 - 745 \times 3
\end{aligned}
$$

Da cui otteniamo:

$$5 = 2525 \times 14 - 745 \times 47$$

(b) Sia $d = \texttt{MCD}(a, b)$ allora $d|a$ e $d|b$ quindi $a = d \times k$ e $b = d \times h$, da cui

$$a - b = d \times k - d \times h = d(k - h)$$

Quindi $d|a - b$.

(c)
- Sia $d = \texttt{MCD}(1863, 1866)$ allora per il punto (b) $d|1866 - 1863 = 3$, quindi $d = 1$ o $d = 3$. Osserviamo che $3|1863$ e $3|1866$ quindi $d = 3$.
- Sia $d = \texttt{MCD}(1861, 1865)$ allora per il punto (b) $d|1865 - 1861 = 4$, quindi $d = 1$, $d = 2$ o $d = 4$. Osserviamo che $2, 4 \not| 1861$ e $2, 4 \not| 1865$ quindi $d = 1$.

4. **(6 pt)**

(a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

(b) Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definita induttivamente come segue:

$$a_1 = 5,\ \ a_2 = 7 \text{ e, per ogni } n \geq 3,\ \ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Provare che $a_n = 3 + 2^n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Soluzione

(a) Verifichiamo l'ipotesi induttiva: per $n = 1$ si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Per induzione supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots \quad &+ \quad \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2n+3}\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(n(2n+3) + 2(n+1)\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(2n^2 + 5n + 2\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(n+2\right)\left(2n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}
\end{aligned}$$

Quindi la formula è dimostrata

(b) Usiamo l'induzione forte. Verifichiamo la formula per $n = 1$ ed $n = 2$, si ha che

$$a_1 = 5 \text{ e } a_2 = 7,$$
$$3 + 2^1 = 5 \text{ e } 3 + 2^2 = 7.$$

Quindi per iduzione forte supponiamo che sia vera per ogni $i < n + 1$ e verifichiamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} \\ &= 3(3 + 2^n) - 2(3 + 2^{n-1}) \\ &= 9 - 6 + 3 \times 2^n - 2 \times 2^{n-1} \\ &= 3 + (3 - 1)2^n \\ &= 3 + 2^{n+1} \end{aligned}$$

Quindi la formula è dimostrata.

5. **(5 pt)** Sia p un numero primo > 3 tale che $p+2$ è primo. Provare che 12 divide $p + (p + 2)$.

Soluzione

Osserviamo che:

(a) $p + (p + 2) = 2(p + 1) \Rightarrow 2|p + (p + 2)$

(b) Poiché p è un numero primo maggiore di 3 $p + 1$ è pari, dunque $2|p + 1$

(c) Poiché p e $p + 2$ sono numeri primi maggiori di 3 si ha che $3 \not| p$ e $3 \not| p+2$, quindi $3|p+1$, perché p, $p+1$ e $p+2$ sono tre rappresentanti distinti delle classi resto modulo 3.

Riassumendo $6|p + 1$ e $12|p + (p + 2)$.

6. **(5 pt)** Stabilire quali dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}/\equiv_n$ sono zero-divisori e quali sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

$$[-31]_6,\ [-15]_9,\ [43]_{49},\ [48]_{21}$$

Soluzione

- $[-31]_6 = [5]_6$, poiché $\texttt{MCD}(5,6) = 1$ si ha che $[5]_6$ è invertibile e il suo inverso è $[5]_6$.
- $[-15]_9 = [3]_9$, poiché $\texttt{MCD}(3,9) = 3$ si ha che $[3]_9$ è uno zero divisore.
- $[43]_{49}$, poiché $\texttt{MCD}(43,49) = 1$ si ha che $[43]_{49}$ è invertibile e il suo inverso è $[8]_{49}$.
- $[48]_{21} = [6]_{21}$, poiché $\texttt{MCD}(6,21) = 3$ si ha che $[6]_{21}$ è uno zero divisore.