AL310 Istituzioni di Algebra Superiore

A.A. 2012/2013

Prof. Stefania Gabelli

Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois

1. Elementi di Teoria dei Campi

Campi e sottocampi. Caratteristica. Omomorfismi di campi.

Ampliamenti di campi. Ampliamenti semplici e finitamente generati. Il composto di due campi.

Elementi algebrici e trascendenti. Il polinomio minimo di un elemento algebrico. Il Teorema di Kronecker sugli ampliamenti semplici.

Il grado di un ampliamento. Ampliamenti quadratici e biquadratici. Ampliamenti finiti.

Radici n-sime dell'unità. Radici primitive. Polinomi ciclotomici. Ampliamenti ciclotomici.

Costruzioni di radici e campi di spezzamento. F-isomorfismi. Unicità del campo di spezzamento.

Campi finiti: esistenza ed unicità. Polinomi irriducibili su campi finiti.

Ampliamenti algebrici. Ampliamenti algebrici finitamente generati. Esempi di ampliamenti algebrici non finiti.

Chiusura algebrica e campi algebricamente chiusi.

Elementi coniugati e campi coniugati. Chiusura normale e ampliamenti normali.

Cenni sugli ampliamenti separabili. Il teorema dell'elemento primitivo. Ampliamenti di Galois finiti.

2. La corrispondenza di Galois

Il gruppo di Galois di un ampliamento di campi. Il gruppo di Galois di un campo finito. Il gruppo di Galois di un ampliamento ciclotomico.

Il gruppo di Galois di un polinomio.

Il gruppo di Galois di un polinomio come gruppo di permutazioni.

Esempi di polinomi di grado primo p con gruppo di Galois isomorfo a S_p.

Campi intermedi e campi fissi.

Il Teorema Fondamentale della corrispondenza di Galois. Calcolo esplicito di esempi.

La corrispondenza di Galois per alcuni ampliamenti ciclotomici. Sottocampi reali di ampliamenti ciclotomici. Costruzione di polinomi con tutte radici reali. Costruzione di polinomi con gruppo di Galois ciclico.

3. Risolubilità per radicali

Indipendenza algebrica.

Polinomi e funzioni simmetriche: il teorema fondamentale. Il polinomio generale e il suo gruppo di Galois. Relazioni fra le radici ed i coefficienti di un polinomio. Il discriminante di un polinomio. Formule per il calcolo del discriminante. Il discriminante del p-esimo ampliamento ciclotomico.

Il problema della risolubilità per radicali di un'equazione polinomiale.

Ampliamenti radicali. Il gruppo di Galois di un ampliamento radicale puro.

Cenni sui gruppi risolubili: esempi.

Un polinomio è risolubile per radicali se e soltanto se il suo gruppo di Galois è risolubile. Dimostrazione della necessità.

Il Teorema di Ruffini-Abel: Il polinomio generale di grado $n \geq 5$ non è risolubile per radicali.

Esempi di equazioni di quinto grado risolubili o non risolubili per radicali.

Le formule di Cardano per le soluzioni di un'equazione di terzo grado.

Le formule di Descartes per le soluzioni di un'equazione di quarto grado. Caso biquadratico.

Discussione del gruppo di Galois delle equazioni di terzo e quarto grado.

4. Argomenti facoltativi

(1) Irriducibilità dei polinomi ciclotomici (Paragrafo 4.4.1).

(2) Il teorema di Dirichlet sull'esistenza di numeri primi congrui a 1 modulo n (Paragrafo 4.4.4).

(3) Costruzione di polinomi irriducibili su $\mathbb{Q}$con gruppo di Galois abeliano assegnato (Teorema 8.3.14).

(4) Caratterizzazione degli ampliamenti ciclici (Teorema Kummer, 9.1.4) e dimostrazione completa del teorema di risolubilità (Teorema 9.2.5).

(5) Equazioni di quinto grado (Paragrafo 9.5.1)

(6) Una dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra (Capitolo 10).

(7) Basi di trascendenza (Paragrafi 6.1/2).

(8) Gli automorfismi del campo complesso (Paragrafo 6.5)

I riferimenti bibliografici sono al testo consigliato.

Testi consigliati

[1] S. Gabelli, *Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois*. Springer Italia, (2008).

Bibliografia supplementare

[2] C. Procesi, *Elementi di Teoria di Galois*. Decibel, Zanichelli, (Seconda ristampa, 1991).
[3] I. Stewart, *Galois Theory*. Chapman and Hall, (1989).
[4] J. Rotman, *Galois Theory*. Universitext, Springer-Verlag, (1990).
[5] M. H. Fenrick, *Introduction to the Galois Correspondence*. Birkäuser, (1992).
[6] M. Artin, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1998).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

L'esame consiste di due prove scritte da svolgersi in classe durante il corso e da un colloquio integrativo.

Nel caso in cui la media dei voti riportati nelle due prove scritte non raggiunga la sufficienza è necessario sostenere una prova scritta finale.