Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
AL310 – Istituzioni di Algebra superiore
Prima prova di valutazione in itinere

Esercizio 1. Siano $\zeta, \lambda \in \mathbf{C}$ rispettivamente radici primitive decime e quinte dell'unità.

(i) Si verifichi che $K := \mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{Q}(\lambda)$.

(ii) Si calcoli il polinomio minimo di $\lambda + \lambda^{-1}$ su $\mathbf{Q}$.

(iii) Si verifichi che $\mathbf{Q}(\sqrt{5}) \subseteq K$.

(iv) Si trovino tutte le immersioni di K in $\mathbf{C}$. Quali fra queste sono $\mathbf{Q}(\sqrt{5})-$immersioni?

(v) Si provi che ogni immersione di K in $\mathbf{C}$ è un automorfismo di K e si descriva la struttura del gruppo $\mathrm{Aut}(K)$ di tutti gli automorfismi di K.

Esercizio 2. Si determini un'immersione $\varphi : \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2}) \hookrightarrow \mathbf{C}$ che non sia un automorfismo di $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$ e si estenda φ ad un automorfismo di $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f(T) := T^4 + 2nT^2 - n \in \mathbf{Z}[T]$, essendo $n \geq 2$ un numero intero privo di fattori quadratici. Si risolva ciascuna delle seguenti questioni esibendo un argomento chiaro e conciso.

(i) Si trovino le radici di f in $\mathbf{C}$.

(ii) Si stabilisca se $\rho := n\sqrt{n^2 + n}$ è un numero razionale.

(iii) Detta η una radice reale di f, si calcoli $[\mathbf{Q}(\eta) : \mathbf{Q}(\rho)]$, dopo aver verificato che $\mathbf{Q}(\rho) \subseteq \mathbf{Q}(\eta)$.

(iv) Si stabilisca se $\mathbf{Q}(\eta)$ è il campo di spezzamento di f (in $\mathbf{C}$).

(v) Denotato con K il campo di spezzamento (in $\mathbf{C}$) di f, si calcoli $[K : \mathbf{Q}]$.

Esercizio 4. Si considerino i polinomi

$$f_1(T) := T^4 + T + 1, \quad f_2(T) := T^3 + T + 1 \in \mathbf{F}_2[T].$$

(i) Si verifichi che f_1, f_2 sono irriducibili su $\mathbf{F}_2$.

(ii) Si costruisca un ampliamento K di $\mathbf{F}_2$ contenente sia una radice α di f_1 che una radice β di f_2.

(iii) Si determini una base di ciascuno degli spazi vettoriali $\mathbf{F}_2(\alpha), \mathbf{F}_2(\beta)$ (su $\mathbf{F}_2$). Quali sono le componenti di β^4 rispetto alla base data per $\mathbf{F}_2(\beta)$?

(iv) Si verifichi esplicitamente che TUTTE e SOLE le radici di f_1 (risp. f_2) in K sono $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$ (risp. β, β^2, β^4).

(v) È vero che $\mathbf{F}_2(\beta) = \mathbf{F}_2(\beta^2 + 1)$? È vero che $\mathbf{F}_2(\alpha) = \mathbf{F}_2(\alpha^2 + 1)$?

(vi) Si determini un campo di spezzamento L di del polinomio $f_1(T)f_2(T)$ e si calcoli $[L : \mathbf{F}_2]$.