Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2012/2013

AL420 - Teoria Algebrica dei Numeri (Prof. S. Gabelli)

Compito finale

1. Sia $d := -5$ e $\alpha = 1 + \omega_d \in \mathbb{Z}[\omega_d]$. Determinare $a, m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha\mathbb{Z}[\omega_d] = n\mathbb{Z} + (a + m\omega_d)\mathbb{Z}$.

2. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ l'ideale generato da $1 + \sqrt{3}$. Determinare tutti gli elementi dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/I$.

3. Dando per noto che l'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ è $A := \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$, determinare gli ideali primi di A che dividono l'ideale $5\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ e stabilire se essi sono principali.

4. Sia $d = -23$. Mostrare che ω_d è irriducibile in $\mathbb{Z}[\omega_d]$ e fattorizzare in ideali primi l'ideale principale $\omega_d\mathbb{Z}[\omega_d]$.

5. Sia $\xi = \xi_9$ una radice primitiva nona dell'unità. Studiare la ramificazione di 2 e 3 in $\mathbb{Z}[\xi]$ (anello degli interi di $\mathbb{Q}(\xi)$).

6. Sia $d := -26$. Dimostrare che il gruppo delle classi di $\mathbb{Z}[\omega_d]$ è ciclico di ordine 6.

   Fattorizzare 27 in $\mathbb{Z}[\omega_d]$.