Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2004/2005

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 4

1. Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia I un ideale (risp. un ideale primo) di B. Mostrare che $I \cap A$ è un ideale (risp. un ideale primo) di A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $I \cap A$ può essere primo anche se I non lo è.

2. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 14 in elementi irriducibili e l'ideale $14\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento 10 in elementi irriducibili e l'ideale $10\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

4. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. In $\mathcal{O}_K$, fattorizzare l'elemento $5 + \sqrt{3}$ in elementi irriducibili e l'ideale $(5 + \sqrt{3})\mathcal{O}_K$ in ideali primi.

5. Determinare un elemento α in un anello di interi quadratici tale che $N(\alpha) = 31$, $Tr(\alpha) = 17$.

6. Sia α una radice del polinomio $X^3 + 3X + 7$ e sia $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Mostrare che α è un elemnto primo di $\mathcal{O}_K$.

7. Esiste un anello di interi algebrici in cui un elemento di norma 12 è primo?

8. Mostrare che in un anello di interi quadratici un numero primo $p \in \mathbb{Z}$ può essere fattorizzato al più in due elementi primi.

9. Determinare due elementi di un campo di interi quadratici che hanno stessa norma ma che non sono né coniugati né associati.

10. Determinare tutti gli elementi associati a $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ e tutti gli elementi associati a $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

11. Sia $I \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ideale generato da 4 e $2\sqrt{2}$. Mostrare che I è un ideale principale e determinare una base intera per I.

12. Sia $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base intera di $\mathcal{O}_K$ e sia $\gamma \in \mathcal{O}_K$, $\gamma \neq 0$. Mostrare che $\{\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n\}$ è una base intera per l'ideale I se e soltanto se $I = \gamma\mathcal{O}_K$.

13. Siano α, $\beta \in \mathcal{O}_K$ tali che $N(\alpha)$ e $N(\beta)$ siano relativamente primi. Mostrare che $\alpha\mathcal{O}_K + \beta\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$.

14. Determinare:

$$(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1+i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]+(1+2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$$