Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2004/2005

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 2

1. Determinare un elemento primitivo per i seguenti ampliamenti di $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$; $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2})$.

2. Siano $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva terza dell'unità e $K := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$. Mostrare che $\alpha - \alpha\xi$ è un elemento primitivo per K su $\mathbb{Q}$ mentre $\alpha + \alpha\xi$ non lo è.

3. Sia θ una radice del polinomio $X^5 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento θ^2.

4. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\theta := \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ ed i coniugati di θ.

5. Determinare i $\mathbb{Q}(\theta)$-coniugati di θ e α per $\theta := \sqrt[4]{3}$ e $\alpha := 1+\theta,\ \theta+\theta^2$.

6. Sia ξ una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i $\mathbb{Q}(\xi)$-coniugati di $\alpha := \xi + \xi^{-1}$.

7. Siano $\alpha := \sqrt{2}$, $\beta := \sqrt{3}$, $\theta := \alpha + \beta$. Determinare il discriminante di $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ rispetto alle basi: $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$.

8. Sia $\theta := \sqrt[3]{2}$. Determinare il discriminante di $\mathbb{Q}(\theta)$ rispetto alle basi: $\{1, \theta, \theta^2\}$, $\{\theta, \theta^2 + \theta, \theta^3 + 1\}$.

9. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $m(X) := a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Mostrare che α è un autovalore, di autovettore $\mathbf{v} := (1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$