Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2004/2005

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 1

1. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5+3i$ e $13+18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

3. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I=(1+3i)$ e $J=(3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I\cap J$.

4. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

5. Sia $p\in\mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } a+bi+(p) \to \bar{a}+\bar{b}X+(X^2+1)$$

   è un isomorfismo di anelli.

   Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio X^2+1 è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$, ovvero la congruenza $X^2+1\equiv 0 \mod p$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

6. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}\,,\quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}\,,\quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}\,.$$

7. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

8. Costruire esplicitamente i campi:

   $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}+2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{5}+2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3}).$

9. Sia K un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

10. Siano a, b due interi positivi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a},\sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}),$$

   per ogni x, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

11. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[m]{3}).$$

12. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2},\ \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$

   per un opportuno $r \geq 2$.

13. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che
    (a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F .
    (b) Se α ha grado dispari su F, allora α^2 ha lo stesso grado di α.

14. Determinare due basi diverse su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi:
    $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt[3]{2}})\,,\ \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}).$

15. Determinare il grado di $\pi + \frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

16. Determinare l'inverso di $\sqrt{5}+1$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

17. Determinare l'inverso (razionalizzato) di $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

18. Sia α una radice del polinomio $4X^4+5X+10$. Determinare l'inverso di $\alpha^3+\alpha+1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.