

# AL3 Fondamenti di Algebra Commutativa

A.A. 2008/2009

Prof. Stefania Gabelli

## 1. Moduli

Moduli e sottomoduli. Operazioni tra sottomoduli. Omomorfismi e moduli quoziente. Generatori e basi. Somma e prodotto diretto di moduli. Moduli liberi. Invarianza del rango. Matrici su un anello e loro proprietà. Il Teorema di Cayley-Hamilton. Successioni esatte e successioni esatte corte. Risoluzioni libere (cenni).

## 2. Ideali

Operazioni tra ideali. Omomorfismi di Anelli e Anelli quoziente. Il Lemma di Zorn. Spettro primo e Spettro massimale di un anello. Il Teorema Cinese per gli anelli. Il "Prime Avoidance Theorem". Anelli locali. L'anello delle serie formali in una indeterminata. Ideali primi minimali. Nilradicale e Radicale di Jacobson. Il radicale di un ideale. Ideali primari.

## 3. Anelli di Frazioni

Parti moltiplicative. Parti moltiplicative saturate. L'insieme degli zero-divisori è una unione di ideali primi. Il Nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi. Anelli e moduli di frazioni. Anello totale delle frazioni. Localizzazione. Esattezza della localizzazione. Proprietà locali. Estensione e contrazione di ideali. Ideali primi e primari in anelli di frazioni.

## 4. Anelli e Moduli Noetheriani

Condizione della catena ascendente e proprietà equivalenti. Moduli e anelli noetheriani. Il teorema di Cohen. Passaggio della noetherianità ai quozienti e agli anelli di frazioni. Moduli e algebre su anelli noetheriani. Il Teorema della Base di Hilbert. Decomposizione primaria di ideali: Primi associati; Componenti isolate e componenti immerse; Teoremi di unicità. Decomposizione primaria in anelli noetheriani. Il Lemma di Nakayama. Il Teorema dell'Intersezione di Krull. Cenni sulle varietà algebriche affini. Enunciato e significato del Teorema degli Zeri.

## 5. Dipendenza Integrale

Dipendenza Integrale: condizioni equivalenti. Transitività della dipendenza integrale. Chiusura integrale e sue proprietà: comportamento nel passaggio ai quozienti e agli anelli di frazioni. Cenni sulla noetherianità e la finitezza della chiusura integrale. Enunciato del Lemma di Normalizzazione di Noether. Dimensione della chiusura integrale: Lying over, Incomparabilità, Going up.

**6. Anelli di Valutazione**

Anelli di valutazione e loro prime proprietà. Anelli di valutazione discreta. Valutazioni discrete. La relazione di dominanza. Il Teorema di Krull sulla chiusura integrale.

**7. Domini di Dedekind**

Domini di Dedekind e loro caratterizzazione tramite i domini di valutazioni discrete. Ideali frazionari invertibili. Fattorizzazione degli ideali nei domini di Dedekind.

**8. Anelli Artiniani**

Condizione della catena discendente e proprietà equivalenti. Moduli e anelli artiniani. Prime proprietà degli anelli artiniani. Il Teorema di Struttura.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, (1969).  
 [2] R. Y. SHARP, *Steps in Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 51, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in una prova scritta e in un colloquio orale, volto ad accertare l'acquisizione da parte dello studente dei concetti e dei metodi illustrati nel corso.

Gli studenti che hanno superato le prove scritte intermedie sono esonerati dal sostenere la prova scritta finale.

Concorrono alla definizione del voto di esame la partecipazione alle lezioni in classe e lo svolgimento di argomenti complementari al corso (tesine).