Roberto Ferretti

ESERCIZI D'ESAME
DI ANALISI NUMERICA

Dispensa per il corso di
"Analisi Numerica"
Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre
1999–2016

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 16.04.99

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore per interpolazioni polinomiali (6 punti).

b) Fornire una maggiorazione esplicita dell'errore che si commette (indipendentemente dalla distribuzione dei nodi) approssimando la funzione $f(x) = \sin^2 x$ nell'intervallo $[-5, 5]$ con un suo polinomio interpolatore di grado $n = 7$ (4 punti).

Esercizio 2. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Trovare una permutazione di righe e/o colonne per cui esso possa essere risolto tramite l'algoritmo di Jacobi (3 punti).

b) Specificata una norma opportuna su $\mathbf{R}^3$, trovare la costante di Lipschitzianitá della contrazione (definita al punto precedente) ed il numero di iterazioni necessario per ridurre l'errore ad 1/1000 dell'errore sulla approssimazione iniziale (4 punti).

Esercizio 3.

a) Si dimostri che il metodo di Heun per Equazioni Differenziali Ordinarie ha ordine di consistenza 2 (6 punti).

b) Se ne trovi l'intervallo di stabilitá assoluta (3 punti).

Esercizio 4. Data la seguente tabella di valori della funzione $f(x) = e^{-x^2}$,

x	$f(x)$
-1.5	0.1054
-1.0	0.3679
-0.5	0.7788
0.0	1.0
0.5	0.7788
1.0	0.3679
1.5	0.1054

a) Si approssimi l'integrale di f esteso all'intervallo $[-1.5, 1.5]$ con le formule generalizzate dei trapezi e di Simpson (3+3 punti).

b) Si costruisca la tavola delle differenze divise della funzione indicando gli elementi che presentano perdita di cifre significative per sottrazione (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Se non viene specificata la posizione dei nodi, l'unica maggiorazione di errore utilizzabile é

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

e dal momento che $f^{VII}(x) = -128\sin(2x)$, si ha

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{128 \cdot 10^8}{40320} \approx 3.17 \cdot 10^5.$$

Si puó notare come la mancanza di ipotesi sulla posizione dei nodi porti ad una maggiorazione di scarsa utilitá pratica.

Esercizio 2.

a) La matrice del sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Come é noto, l'algoritmo di Jacobi converge se la matrice A é a diagonale dominante. In questo caso la matrice puó essere resa dominante per righe (evitando la rinumerazione delle variabili) portando al primo posto la seconda riga, al secondo posto la terza riga ed al terzo posto la seconda. La matrice che si ottiene é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Con questa rinumerazione, il sistema si scrive come

$$\begin{cases} x_1 = -2/3\ x_3 + 5/3 \\ x_2 = -1/4\ x_1 - 1/2\ x_3 + 1/2 \\ x_3 = -1/4\ x_1 - 1/2\ x_2 + 1/4 \end{cases}$$

ed il metodo di Jacobi ha la forma

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ -1/4 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = Bx^{(k)} + C.$$

Questo operatore é una contrazione in $\mathbf{R}^3$ nella norma $\|\cdot\|_\infty$. La costante di contrazione é la norma della matrice B, ovvero

$$L = \|B\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \frac{3}{4}$$

e poiché dal teorema delle contrazioni si ha $|e^k| \le L^k |e^0|$, il numero di iterazioni N necessario é dato dalla condizione

$$\left(\frac{3}{4}\right)^N \le 10^{-3}$$

ovvero, passando ai logaritmi decimali,

$$N \ge \frac{3}{\log_{10} \frac{4}{3}}$$

cioé almeno 25 iterazioni.

Esercizio 3.

b) La stabilitá assoluta va verificata sul problema modello lineare

$$y' = -\lambda y \qquad (\lambda > 0)$$

la cui approssimazione di Heun si scrive

$$u_{k+1} = u_k + h/2(-\lambda u_k - \lambda(u_k - \lambda h u_k)) = (1 - h\lambda + h^2\lambda^2/2)u_k.$$

Delle condizioni per la stabilitá assoluta,

$$-1 < 1 - h\lambda + h^2\lambda^2/2 < 1,$$

la disuguaglianza di sinistra é sempre vera mentre quella di destra, come é immediato verificare, fornisce la condizione $h < 2/\lambda$.

Esercizio 4.

a) I valori che si ottengono per i due metodi, con il massimo numero di cifre significative utilizzabili, sono $I_{1,6}(f) = 1.6994$ e $I_{2,3}(f) = 1.7115$. Si noti che, utilizzando tutti i nodi in cui la funzione é tabulata, nel primo caso si usa la formula su sei sottointervalli, nel secondo su tre sottointervalli.

b) Nella tavola delle differenze divise non ci sono perdite di cifre significative. Tutte le differenze divise hanno quattro cifre esatte. Anche la differenza divisa $f[x_0, x_1] = f[x_5, x_6] = 0.525$ non presenta perdita di cifre significative, in quanto la prima cifra trascurata é zero.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN3) – 04.06.99

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica per il metodo di Newton in $\mathbf{R}$ (5 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di approssimazione per penalizzazione in problemi di minimizzazione vincolata (5 punti).

Dato il problema di minimizzazione vincolata

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \\ \|x\| \leq 1, \end{cases}$$

b) scrivere esplicitamente una sua approssimazione per penalizzazione, tale che la funzione penalizzata sia C^1 (2 punti);

c) stimare, in funzione del parametro di penalizzazione ε, l'ordine di convergenza del minimo approssimato al minimo esatto (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di approssimazione del primo autovalore tramite l'algoritmo delle potenze (5 punti).

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) calcolare il valore del polinomio caratteristico in $\lambda = 1$ con il metodo delle successioni di Sturm (4 punti);

c) scegliere (motivando la scelta) un intervallo iniziale su cui possa essere applicato il metodo di bisezione per la soluzione dell'equazione caratteristica (3 punti).

Esercizio 4. Dato lo schema semidiscreto (posto per semplicitá su tutto $\mathbf{R}$)

$$\dot{u}_j = -\frac{a}{2h}(u_{j+1} - u_{j-1}) \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

a) si dimostri che é una approssimazione consistente della equazione del trasporto $u_t + au_x = 0$ e se ne calcoli l'ordine di consistenza (5 punti);

b) si scriva la versione totalmente discreta basata sul metodo di Eulero (2 punti);

c) se ne calcoli il dominio di dipendenza discreto e si dia, indipendentemente dal segno di a, la condizione (necessaria) CFL di stabilitá sui passi h e k (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Si puó porre $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$, e definire la funzione penalizzata come

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}[(x_1^2 + x_2^2 - 1)^+]^2$$

che risulta C^1 anche sulla circonferenza $\|x\| = 1$, come si verifica facilmente.

c) Esternamente al vincolo, le derivate parziali della funzione penalizzata sono:

$$f_{\varepsilon x_1}(x_1, x_2) = \left[\frac{4}{\varepsilon}(x_1^2 + x_2^2) + 2\left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right)\right] x_1;$$

$$f_{\varepsilon x_2}(x_1, x_2) = \left[\frac{4}{\varepsilon}(x_1^2 + x_2^2) - 2\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)\right] x_2.$$

Poiché la prima delle due parentesi quadre non si puó annullare fuori dal vincolo, si ha che i punti stazionari della funzione penalizzata sono l'origine (che peró é un punto di sella) ed i punti $\left(0, \pm\sqrt{1 + \varepsilon/2}\right)$. I punti di minimo vincolato per il problema originale sono $(0, \pm 1)$ e quindi l'errore dovuto alla penalizzazione é un infinitesimo del primo ordine in ε.

Esercizio 3.

b) La successione di determinanti dei minori principali di $A - \lambda I$ é $P_0(1) = 1$, $P_1(1) = 1$, $P_2(1) = 0$, $P_3(1) = -1$, $P_4(1) = -1$, $P_5(1) = P(1) = 0$.

c) E' noto che il raggio spettrale di una matrice é maggiorato da una qualsiasi sua norma. Nel nostro caso $\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 4$ e quindi tutti gli autovalori sono nell'intervallo $[-4, 4]$. Questo intervallo é anche accettabile come intervallo iniziale di bisezione, poiché la matrice é di ordine dispari e quindi il polinomio caratteristico ha sicuramente segni opposti negli estremi dell'intervallo.

Esercizio 4.

a) Si ha, supponendo la soluzione sufficientemente regolare:

$$u_t(x_j) + \frac{a}{2h}[u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})] =$$

$$= u_t(x_j) + \frac{a}{2h}\left[u(x_j) + hu_x(x_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_j) + O(h^3) - \right.$$

$$\left. -u(x_j) + hu_x(x_j) - \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_j) + O(h^3)\right] =$$

$$= u_t(x_j) + au_x(x_j) + O(h^2).$$

Lo schema é quindi di secondo ordine rispetto al passo spaziale h.

c) Il dominio di dipendenza discreto del valore u_j^m é dato dall'intervallo $[u_{j-m}, u_{j+m}]$. Il punto $x_j - at_m$ appartiene a quest'intervallo (indipendentemente dal segno di a) se

$$\frac{k}{h} < \frac{1}{|a|}.$$

Al contrario di quanto accade per il metodo "upwind" di primo ordine, non c'é bisogno in questo caso di fare ipotesi sul segno di a perché il dominio di dipendenza si allarga in modo simmetrico.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.06.99

Esercizio 1.

a) Dimostrare la fattorizzabilitá di una matrice nonsingolare (a meno di permutazioni di righe) nella forma $A = LU$ (5 punti).

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Dire (in base a proprietá facilmente verificabili) se é possibile fattorizzarla senza permutazioni di righe (2 punti);

c) Costruirne la fattorizzazione LU di Doolittle (4 punti).

Esercizio 2.

a) Dimostrare che i polinomi di Lagrange $L_i(x)$ relativi ad $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ sono una base dello spazio P_n e scrivere il polinomio interplatore relativo a tali nodi in questa base (5 punti);

Data la seguente tabella di valori della funzione $f(x) = \mathrm{sign}(x)$,

x	$f(x)$
-5.0	-1.0
-3.0	-1.0
-1.0	-1.0
1.0	1.0
3.0	1.0

b) Scrivere la base di Lagrange relativa a $x_0, \ldots, x_4$ (3 punti);

c) Calcolare il valore del polinomio interpolatore in $x = 0$ (2 punti).

Esercizio 3. Dimostrare il grado di precisione delle formule di quadratura gaussiane (6 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare che il metodo di Crank–Nicolson é incondizionatamente assolutamente stabile e che ha consistenza del secondo ordine (3+4 punti).

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

b) Scrivere esplicitamente un metodo predictor–corrector basato sull'accoppiamento Eulero / Crank–Nicolson, con soluzione iterativa della equazione nonlineare (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La fattorizzabilitá della matrice é conseguenza della dominanza diagonale (per righe).

c) La fattorizzazione di Doolittle della matrice A é data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 11/114 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 38/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 229/57 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.

c) Si ha $\Pi_4(0) = -0.092$.

Esercizio 4.

b) Indicando con $u_k^{(n)}$ la n–esima approssimazione del valore u_k, e supponendo di effetuare N iterazioni per calcolare la soluzione del metodo implicito, si ha:

$$\begin{cases} u_{k+1}^{(0)} = u_k + hf(x_k, u_k) & \text{(predictor);} \\ u_{k+1}^{(n+1)} = u_k + \frac{h}{2}[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})] & \text{(corrector);} \\ u_{k+1} = u_{k+1}^{(N)}. \end{cases}$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 9.07.99

Esercizio 1. Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Costruirne la fattorizzazione di Cholesky (3 punti);

b) Costruire la matrice trasformante che opera l'azzeramento degli elementi fuori diagonale nella prima colonna (2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore relativo ad $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ (6 punti).

b) Data la seguente tabella di valori della funzione $f(x) = \sin x$,

x	$f(x)$
-3.0	-0.1411
-2.0	-0.9093
-1.0	-0.8415
1.0	0.8415

scriverne il relativo polinomio interpolatore nella forma di Newton, indicando se ed eventualmente quali differenze divise presentino perdita di cifre significative (5 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la convergenza delle formule di Newton–Cotes generalizzate (5 punti).

b) Approssimare il valore dell'integrale

$$\int_0^1 x^2 dx$$

mediante la formula dei trapezi generalizzata con 2, 3, 4 nodi (1+1+1 punti).

c) Sapendo che per l'errore di quadratura vale la maggiorazione

$$|I(f) - I_{1,m}(f)| \leq Ch^2,$$

valutare la costante C (3 punti).

Esercizio 4.

a) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e, al variare di $\theta \in [0,1]$, la famiglia di schemi numerici (detti θ–metodi)

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + h[\theta f(x_k, u_k) + (1-\theta) f(x_{k+1}, u_{k+1})] \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

determinarne l'intervallo di stabilita' assoluta al variare di θ (4 punti);

b) Dire quale é l'ordine di consistenza, sempre al variare di θ (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) La fattorizzazione di Cholesky di A é $A = HH^t$ con H data da:

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{3} & \sqrt{97/15} \end{pmatrix}$$

b) Si tratta di azzerare l'elemento a_{31} sostituendo alla terza riga la somma della terza riga e della prima moltiplicata per $-1/5$. Effettuando questa operazione sulla matrice identitá, si ottiene

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza, il prodotto TA vale:

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 39/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

b) Le differenze divise che presentano perdita di cifre significative per sottrazione sono $f[x_1, x_2] = 0.0678$ e $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.0400$.

Esercizio 3.

b, c) Si ha $I(f) = 1/3$, $I_{1,1}(f) = 1/2$, $I_{1,2}(f) = 3/8$, $I_{1,3}(f) = 19/54$; tenendo conto che h vale rispettivamente 1, 1/2, 1/3, otteniamo

$$|I(f) - I_{1,1}(f)| = 1/6;$$

$$|I(f) - I_{1,2}(f)| = 1/24 = 1/6 \cdot (1/2)^2;$$

$$|I(f) - I_{1,3}(f)| = 1/54 = 1/6 \cdot (1/3)^2$$

da cui si ottiene il valore $C = 1/6$. Tale valore poteva anche trovarsi passando per la stima generale dell'errore di quadratura

$$|I(f) - I_{1,m}(f)| = \frac{f''(\xi)h^2}{12}$$

e ricordando che nel nostro caso $f''(x) \equiv 2$.

Esercizio 3.

$a)$ Applicando lo schema proposto al problema modello $y' = -\lambda y$ abbiamo:

$$u_{k+1} = \frac{1 - h\theta\lambda}{1 + h(1-\theta)\lambda} u_k.$$

Il coefficiente che moltiplica u_k vale 1 per $h = 0$ ed é una funzione decrescente rispetto ad h, come é facile verificare. Il suo valore limite (per $h \to \infty$) é $\theta/(\theta - 1)$, perció se $\theta < 1/2$ lo schema é incondizionatamente assolutamente stabile, altrimenti la regione di stabilitá si ottiene risolvendo la disequazione

$$\frac{1 - h\theta\lambda}{1 + h(1-\theta)\lambda} > -1$$

che da'

$$h < \frac{2}{(2\theta - 1)\lambda}$$

$b)$ Sostituendo la soluzione $y(x)$, si ottiene

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h[\theta f(x_k, y(x_k)) + (1-\theta) f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))] + h\tau$$

da cui

$$h\tau = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx - h[\theta f(x_k, y(x_k)) + (1-\theta) f(x_{k+1}, y(x_{k+1})].$$

Il secondo termine a secondo membro si puó interpretare come una formula di quadratura sulla funzione $f(x, y(x))$. La precisione é $O(h^2)$ se $\theta \neq 1/2$, $O(h^3)$ se $\theta = 1/2$. Di conseguenza il metodo proposto é del primo ordine, a meno che $\theta = 1/2$, nel qual caso é di secondo ordine (e coincide con il metodo di Crank–Nicolson).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 03.09.99

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange (4 punti).

b) Dati i nodi $x_i = i$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, scrivere esplicitamente la relativa base di Lagrange di terzo grado $\{L_i(x)\}$ (3 punti).

Esercizio 2.

a) Dimostrare la convergenza dell'algoritmo di Jacobi per sistemi lineari a dominanza diagonale (6 punti).

b) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

trovare una permutazione di righe che renda convergente l'algoritmo di Jacobi e calcolare la costante di lipschitzianitá della contrazione cosí ottenuta (2+3 punti).

Esercizio 3.

a) Si dimostri la convergenza del metodo di Eulero per Equazioni Differenziali Ordinarie (6 punti).

b) Se ne trovi l'intervallo di stabilitá assoluta (2 punti).

Esercizio 4.

a) Basandosi sulla base di Lagrange calcolata al punto 1*b*, trovare la formula di quadratura di Newton–Cotes di terzo grado estesa ad un intervallo qualsiasi (5 punti).

Data la seguente tabella di valori della funzione $f(x) = e^{-x^2}$,

x	$f(x)$
-1.5	0.1054
-1.0	0.3679
-0.5	0.7788
0.0	1.0
0.5	0.7788
1.0	0.3679
1.5	0.1054

Si approssimi l'integrale di f esteso all'intervallo $[-1.5, 1.5]$, utilizzando

b) la formula di terzo grado appena trovata (2 punti),

c) la formula di Simpson (2 punti),

d) la formula dei trapezi generalizzata (2 punti).

N.B.: *non é detto* che in queste quadrature vadano sempre utilizzati tutti i punti in cui é tabulata f. Utilizzare solo i punti che sono richiesti dalla quadratura in uso e dall'intervallo di integrazione.

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Il sistema si puó riscrivere nella forma

$$\begin{cases} 3x_1 = -x_2 - x_3 + 2 \\ 4x_2 = -x_1 + 5 \\ 4x_3 = -2x_2 + 20 \end{cases}$$

e l'algoritmo di Jacobi da'

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/4 \\ 5 \end{pmatrix} = Bx^{(k)} + C.$$

La costante di contrazione dell'operatore vale

$$L = \|B\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 4.

a) Esplicitiamo il calcolo del coefficiente relativo al nodo x_0. Poiché

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{11}{6}x + 1$$

si ha

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{11}{6}x + 1\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{24}[x^4]_0^3 + \frac{1}{3}[x^3]_0^3 - \frac{11}{12}[x^2]_0^3 + 3 = \frac{3}{8}.$$

Con calcoli analoghi si ottiene

$$\int_0^3 L_1(x)dx = \int_0^3 L_2(x)dx = \frac{9}{8},$$

$$\int_0^3 L_3(x)dx = \frac{3}{8},$$

e di conseguenza la formula di quadratura richiesta é

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)).$$

b, c, d) Nell'ordine, si hanno le quadrature:

$$\frac{3}{8}(f(-1.5) + 3f(-0.5) + 3f(0.5) + f(1.5)) = 1.83135,$$

$$\frac{1.5}{3}(f(-1.5) + 4f(0) + f(1.5)) = 2.1054,$$

$$\frac{0.5}{2}(f(-1.5) + 2f(-1) + \ldots + 2f(1) + f(1.5)) = 2.1467.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 29.09.99

Esercizio 1.

a) Esporre l'algoritmo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale, giustificando in particolare perché tale algoritmo conduca necessariamente alla soluzione per ogni sistema lineare nonsingolare (6 punti).

b) Calcolarne la complessitá computazionale (4 punti).

Esercizio 2. Si supponga di interpolare una funzione in $[-1, 1]$ con un polinomio interpolatore di secondo grado e nodi simmetrici $x_0 = -a$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$.

a) Maggiorare l'errore di interpolazione in modo indipendente da x ma *il piú accurato possibile* nel caso in cui $a = 1$ e $f(x) = \sin x$ (4 punti).

b) Dimostrare che al variare del parametro a in $[0, 1]$ la migliore stima (cioé il minor valore di $\|\omega\|_\infty$) si ha per $a = \sqrt{3}/2$ (7 punti).

Esercizio 3.

a) Utilizzando le relazioni che legano i pesi di una formula di quadratura interpolatoria, dimostrare che i pesi della formula costruita sui nodi dell'esercizio precedente possono essere calcolati con *una sola* operazione di integrazione (5 punti).

b) Calcolare i pesi della formula di quadratura costruita sui nodi (di Chebyshev–Gauss) $x_0 = -\sqrt{3}/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}/2$ (3 punti).

Esercizio 4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ed il metodo multistep definito da

$$u_{k+1} = u_{k-1} + h[f(x_{k-1}, u_{k-1}) + f(x_{k+1}, u_{k+1})]$$

a) Determinarne l'intervallo di stabilita' assoluta (3 punti);

b) Dire quale é l'ordine di consistenza del metodo (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Utilizziamo la maggiorazione

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{3!} \|\omega_2\|_\infty.$$

Dal momento che $f'''(x) = -\cos x$, si ha $\|f'''\|_\infty = 1$, ed inoltre

$$\omega_2(x) = (x+a)x(x-a) = x^3 - a^2 x.$$

I due punti stazionari, come é facile verificare, sono $\pm a/\sqrt{3}$, e se $a = 1$, poiché $\omega_2(\pm 1) = 0$, il massimo modulo si avrá in un punto stazionario, ovvero

$$\|\omega_2\|_\infty = |\omega_2(\pm a/\sqrt{3})| = \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.39.$$

Di conseguenza l'eerore puó essere maggiorato come

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}3!} \approx 0.065.$$

b) Si é giá calcolato al punto precedente il valore di ω_2 nei punti stazionari per un a generico. Se $a \neq 1$, occorre tenere in conto anche il valore agli estremi, che é $|\omega_2(\pm 1)| = 1 - a^2$. Si avrá quindi:

$$\|\omega_2\|_\infty = \max(|\omega_2(\pm a/\sqrt{3})|, |\omega_2(\pm 1)|) = \max\left(\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}, 1 - a^2\right).$$

Delle due quantitá che compaiono, la prima é monotona crescente con a, la seconda monotona decrescente. Il valore minimo di $\|\omega_2\|_\infty$ si avrá perció quando le due quantitá sono uguali, ovvero

$$\frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = 1 - a^2,$$

e si verifica immediatamente che il valore $a = \sqrt{3}/2$ soddisfa questa equazione. Si puó osservare che questa scelta dei nodi fornisce la stima di errore

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{3!} \frac{3}{4} = \frac{1}{24} \approx 0.042.$$

contro il valore 0.065 ottenuto per $a = 1$. La stima di errore per una distribuzione generica dei nodi sarebbe invece stata

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{3!} 2^3 = \frac{4}{3} \approx 1.33.$$

e quindi ben piú sfavorevole.

Esercizio 3.

a) Indicati con α_i i pesi della formula di quadratura, si ha

$$\alpha_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx.$$

Poiché le posizioni dei nodi sono simmetriche rispetto all'origine, $L_0(x) = L_2(-x)$, e poiché l'intervallo di integrazione é anch'esso simmetrico, si ottiene $\alpha_0 = \alpha_2$. Dal fatto che la formula di quadratura é esatta sulle costanti, otteniamo inoltre $\sum_i \alpha_i = 2$. Essendo i tre pesi legati da due relazioni, é realmente necessario calcolare uno solo di essi.

b) Calcoliamo per esempio α_1. Si ottiene:

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} L_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{4}{3}x^2\right) dx = 2 - \frac{4}{9}[x^3]_{-1}^{1} = \frac{10}{9}$$

e di conseguenza

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(2 - \alpha_1) = \frac{4}{9}.$$

Esercizio 4.

a) Applicando il metodo al problema modello lineare e ponendo $u_k = \rho^k$, si ottiene

$$\rho^{k+1} = \frac{1 - h\lambda}{1 + h\lambda}\rho^{k-1}$$

e cioé, posto $h\lambda = t$,

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Come é facile verificare (in modo analogo a quanto fatto per il metodo di Crank–Nicolson), l'argomento della radice ha modulo minore di 1 per $t > 0$, da cui si ottiene anche che $|\rho| < 1$, intendendo quest'ultimo come modulo di un numero complesso.

b) La verifica della consistenza si effettua in modo analogo al metodo dei trapezi (cioé tramite lo sviluppo di Taylor o utilizzando l'equazione di Volterra) ottenendo l'ordine di consistenza 2. In effetti, il metodo multistep che si é chiesto di studiare altro non é che il metodo di Crank–Nicolson applicato separatamente ai nodi pari ed a quelli dispari.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.02.00

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se é necessaria una permutazione di righe (ed eventualmente quale) per costruirne la fattorizzazione LU (5 punti).

b) Calcolarne (eventualmente, dopo aver effettuato una opportuna permutazione di righe) la fattorizzazione di Doolittle (4 punti).

Esercizio 2.

a) Dimostrare la formula di interpolazione di Newton (6 punti).

b) Scrivere il polinomio interpolatore di quarto grado a nodi equidistanti nelle forme rispettivamente di Newton e Lagrange per la funzione $f(x) = \sin x$ sull'intervallo $[0, \pi]$. (4+3 punti).

N.B.: effettuare i calcoli con tre cifre decimali.

Esercizio 3.

a) Dimostrare l'ordine di precisione delle formule di quadratura di Newton–Cotes aperte e chiuse (4 punti).

b) Calcolare i pesi della formula di Newton–Cotes aperta a due nodi (3 punti).

Esercizio 4. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -3y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1\ , \quad y_2(0) = 0. \end{cases}$$

a) Scrivere la sua approssimazione mediante il metodo di Crank–Nicolson, esplicitando in particolare quale sia il sistema lineare che va risolto ad ogni passo (3 punti);

b) Supponendo di risolvere tale sistema con il metodo di Jacobi o di Gauss–Seidel, stimare quale é il massimo valore di h per cui il metodo converge necessariamente alla soluzione del sistema (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) La necessitá di permutazioni di righe si osserva dal fatto che senza permutazioni non si puó portare a termine la eliminazione di Gauss. Infatti eliminando la prima variabile dalla seconda equazione si elimina anche la seconda e quindi si trova un pivot nullo. Poiché la matrice é nonsingolare basta permutare seconda e terza riga per ottenere pivot tutti non nulli.

b) La fattorizzazione di Doolittle della matrice con le righe permutate é:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

Si puó notare come tentando di effetuarla senza scambio di righe si otterrebbe $u_{22} = 0$ e questo renderebbe impossibile proseguire.

Esercizio 2.

b) Le differenze divise di $f(x)$ sono:

$$f[x_0, x_1] = -f[x_3, x_4] = 0.900$$

$$f[x_1, x_2] = -f[x_2, x_3] = 0.373$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_3, x_4] = -0.335$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = -0.475$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -f[x_1, x_2, x_3, x_4] = -0.059$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.037.$$

Esercizio 3.

b) I pesi si possono calcolare immediatamente ricorrendo alle semplificazioni viste nell'esercizio 3 del 29.09.99. Indicando con h il passo tra i nodi di quadratura, ed essendo i nodi simmetrici rispetto al centro dell'intervallo, si ha $\alpha_0 = \alpha_1$ e poiché $\alpha_0 + \alpha_1 = 3h$ per avere una formula esatta sulle costanti, si ottiene infine $\alpha_0 = \alpha_1 = 3h/2$. A tale risultato si poteva arrivare anche dalla definizione, lavorando sull'intervallo $[0, 3h]$. Poiché $x_0 = h$, $x_1 = 2h$, si ha la base di Lagrange

$$L_0(x) = 2 - \frac{x}{h}\ , \quad L_1(x) = -1 + \frac{x}{h}$$

e da qui, calcolando ad esempio α_0:

$$\alpha_0 = \int_0^{3h} \left(2 - \frac{x}{h}\right) dx = 6h - \frac{1}{2h}[x^2]_0^{3h} = 6h - \frac{9h}{2} = \frac{3h}{2}.$$

Il calcolo di α_1 é analogo.

Esercizio 4.

a) Il metodo di Crank–Nicolson per il sistema in questione si scrive:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}[2u_k + 2v_k + 2u_{k+1} + 2v_{k+1}] \\ v_{k+1} = v_k + \frac{h}{2}[-3u_k + v_k - 3u_{k+1} + v_{k+1}] \\ u_0 = 1\ , \quad v_0 = 0. \end{cases}$$

Raggruppando i termini corrispondenti, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} (1-h)u_{k+1} - hv_{k+1} = (1+h)u_k + hv_k \\ 3h/2u_{k+1} + (1-h/2)v_{k+1} = -3h/2u_k + (1+h/2)v_k \end{cases}$$

da risolvere rispetto a u_{k+1}, v_{k+1} ad ogni incremento di k.

b) La matrice del sistema lineare é:

$$A = \begin{pmatrix} 1-h & -h \\ 3h/2 & 1-h/2 \end{pmatrix}$$

Perché il metodo di Jacobi sia convergente é sufficiente che la matrice A sia a diagonale dominante (per righe). Ció fornisce le condizioni

$$\begin{cases} |1-h| > h \\ |1-h/2| > 3h/2 \end{cases}$$

che sono soddisfatte se $h < 1/2$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.04.00

Esercizio 1.

a) Dimostrare il grado di precisione delle formule di quadratura di Gauss–Legendre (5 punti).

Sia data una formula di quadratura su $[-1, 1]$ basata su tre nodi simmetrici $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ e $x_3 = a$ $(a > 0)$.

b) Determinare i pesi α_i $(i = 1, 2, 3)$ della quadratura in funzione di a (3 punti).

c) Determinare il valore di a in modo che la funzione $f(x) = x^4$ venga integrata esattamente (2 punti).

d) Giustificare il fatto che la quadratura ottenuta é una quadratura di Gauss–Legendre (2 punti).

Esercizio 2. Dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore e la formula ricorrente delle differenze divise (6 punti).

Esercizio 3.

a) Dare la formula di fattorizzazione di Cholesky di una matrice definita positiva (3 punti).

b) Costruire la fattorizzazione di Cholesky della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro α (4 punti).

c) Spiegare perché tale fattorizzazione non é possibile per ogni valore di α (2 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare la convergenza del metodo di Eulero per Equazioni Differenziali Ordinarie (6 punti).

Dato il sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t) + y(t) \\ y'(t) = -\beta y(t) \end{cases}$$

b) Scriverne la approssimazione di Eulero (2 punti);

c) Trovare l'intervallo di stabilita' assoluta del metodo in funzione di α, β (parametri reali positivi) (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Per calcolare ad esempio α_2 si ha:

$$L_2(x) = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{1} L_2(x) = \int_{-1}^{1} 1 - \frac{x^2}{a^2} dx = 2 - \frac{2}{3a^2}$$

e di conseguenza

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{2 - \alpha_2}{2} = \frac{1}{3a^2}$$

c) La condizione che il polinomio x^4 sia integrato esattamente fornisce:

$$\frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{3a^2}(-a)^4 + \frac{1}{3a^2}a^4 = \frac{2}{3}a^2$$

da cui si ottiene $a = \sqrt{3/5}$.

d) La formula é esatta fino a polinomi di quinto grado. Infatti i termini fino al secondo grado sono integrati esattamente per costruzione, quelli di terzo e quinto grado perché la formula é simmetrica e quelli di quarto grado in base al punto *c*). Essendo quindi una formula a tre nodi esatta fino al quindo grado, si tratta di una quadratura di Gauss–Legendre.

Esercizio 3.

b) Si ha $A = LL^t$ con:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{11}} & \sqrt{\alpha - \frac{5}{11}} \end{pmatrix}$$

c) Ció é dovuto al fatto che la matrice non é definita positiva per ogni valore di α (ma solo, appunto, per $\alpha > 5/11$).

Esercizio 4.

b) L'approssimazione di Eulero del sistema in esame ha la forma:

$$\begin{cases} u_{k+1} = (1 - h\alpha)u_k + hv_k \\ v_{k+1} = (1 - h\beta)v_k. \end{cases}$$

c) Si tratta di verificare che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 - h\alpha & h \\ 0 & 1 - h\beta \end{pmatrix}$$

abbia autovalori di modulo minore di 1. La condizione di stabilitá assoluta é quindi

$$\max(|1 - h\alpha|, |1 - h\beta|) < 1$$

che implica $h < \min(2/\alpha, 2/\beta)$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 12.06.00

Esercizio 1. Dimostrare la formula dell'errore per le interpolazioni polinomiali (6 punti).

Si consideri la funzione $f(x) = \sin x$ tabulata con cinque nodi in $[0, \pi]$. *Utilizzando in ogni caso tutti i nodi in cui f é tabulata*, si calcoli l'errore di interpolazione rispettivamente

a) Con un unico polinomio interpolatore di quarto grado (2 punti);
b) Con una approssimazione composita di secondo grado a tratti (2 punti);
c) Con una approssimazione composita di primo grado a tratti (2 punti).

Esercizio 2. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 71x_1 + 7x_2 = 1 \\ 3x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases}$$

ed il sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x_1 + 30x_2 = 0 \\ 71x_1 + 7x_2 = 1. \end{cases}$$

a) Calcolare il numero di condizionamento della matrice nei due casi (in norma $\|\cdot\|_\infty$) e dire quale delle due versioni é piú stabile dal punto di vista della approssimazione (5 punti).
b) Dire quale dei due sistemi puó essere risolto tramite il metodo di Jacobi e calcolare la costante di contrazione, sempre nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare che il grado di precisione della formula di quadratura di Simpson é 3 (2 punti).
b) Determinarne i pesi α_i $(i = 1, 2, 3)$ (3 punti).
c) Dopo averne scritta la versione composita, integrare in modo approssimato con questa formula la funzione $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi]$ utilizzando due sottointervalli (2 punti).

Esercizio 4. Dato un generico metodo di Runge–Kutta a due stadi:

$$u_{k+1} = u_k + h[a_1 f(x_k, u_k) + a_2 f(x_k + bh, u_k + bhf(x_k, u_k))]$$

a) Trovare le condizioni su a_1, a_2, b che garantiscono che il metodo sia del secondo ordine (5 punti);
b) Trovare l'intervallo di stabilita' assoluta del metodo in funzione dell'unico parametro indipendente (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1. Osserviamo intanto che $|f^k(x)| \leq 1$ per ogni k ed $x \in [0, \pi]$. Utilizzando la maggiorazione di errore piú semplice, otteniamo:

$a)$ $|E_4| \leq \frac{\pi^5}{5!} \approx 2.55$

$b)$ $|E_2| \leq \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{8} \approx 0.65$

$c)$ $|E_1| \leq \frac{1}{2!}\frac{\pi^2}{16} \approx 0.31.$

Con un ragionamento un po' piú raffinato, si sarebbe potuta calcolare $\|\omega\|_\infty$ in tutti e tre i casi ed arrivare ad una stima piú precisa. In particolare, stimando ad esempio $\|\omega_2\|_\infty$ come nell'esercizio 2 del 29.09.99, si sarebbe ottenuto

$$\|\omega_2\|_\infty = \frac{2\pi^3}{4^3 3\sqrt{3}}$$

e di conseguenza

$$|E_2| \leq \frac{1}{3!}\frac{2\pi^3}{4^3 3\sqrt{3}} \approx 0.031.$$

Esercizio 2.

$a)$ In entrambi i casi si ha

$$\|A\|_\infty = \max(78, 33) = 78 \ , \quad \|A^{-1}\|_\infty = \max\left(\frac{37}{2109}, \frac{74}{2109}\right) = \frac{74}{2109}.$$

I due sistemi sono quindi equivalenti dal punto di vista del condizionamento e della stabilitá di approssimazione.

$b)$ Il primo dei due sistemi ha una matrice a diagonale dominante e quindi puó essere risolto con il metodo di Jacobi, ponendolo nella forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{71}(1 - 7x_2) \\ x_2 = -\frac{x_1}{10}. \end{cases}$$

La relativa costante di contrazione é quindi $L = \max(7/71, 1/10) = 1/10$.

Esercizio 3.

$c)$ Si ha $I_{2,2} = \pi(2\sqrt{2} + 1)/6 \approx 2.0045$.

Esercizio 4.

$b)$ Utilizzando come di consueto il problema modello $y' = -\lambda y$, con i valori dei parametri per cui il metodo é del secondo ordine si ha:

$$u_{k+1} = \left(1 - \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) u_k \qquad (*)$$

da cui si ottiene la condizione di stabilitá assoluta $h < 2/\lambda$ (si veda l'esame del 16.04.99). Si noti che tale risultato non dipende dai valori dei paramentri se lo schema é del secondo ordine. Infatti, in questo caso il polinomio tra le parentesi a secondo membro di (*) deve necessariamente coincidere con lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di $e^{-\lambda h}$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 10.07.00

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di eliminazione di Gauss nelle versioni con pivoting parziale e totale (5 punti);

b) Scriverne un diagramma di flusso, sempre per le due versioni (3 punti);

c) Calcolare la complessitá dell'algoritmo nei due casi (3 punti).

Esercizio 2.

a) Calcolare la posizione dei nodi di Chebyshev $x_0, x_1 \in [-1, 1]$ minimizzando la norma $\|\omega_1\|_\infty$ del polinomio $\omega_1 = (x - x_0)(x - x_1)$ (*Suggerimento:* $x_0 = -x_1$) (5 punti).

b) Stimare l'errore di interpolazione per un polinomio interpolatore $\Pi_1(x)$ costruito su tali nodi, per la funzione $f(x) = \sin(x)$ in $[-1, 1]$ (3 punti).

c) Stimare l'errore di interpolazione per una posizione generica dei nodi in $[-1, 1]$ (2 punti).

Esercizio 3. Dimostrare la convergenza delle formule di Newton–Cotes composite (5 punti).

Esercizio 4. Dato un generico metodo di Runge–Kutta a due stadi:

a) Dimostrare la consistenza e la stabilitá assoluta del metodo di Crank–Nicolson (3+3 punti);

b) Scrivere esplicitamente il metodo di Crank–Nicolson (con soluzione *esatta* del sistema di equazioni) per il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

(4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Poiché $\omega_1(x) = (x - x_0)(x + x_0) = x^2 - x_0^2$, ricordando l'esercizio 2 del 29.09.99, si ottiene:

$$\|\omega_1\|_\infty = \max_{[-1,1]} |x^2 - x_0^2| = \max(x_0^2, 1 - x_0^2).$$

Il valore minimo é ottenuto quindi quando $x_0^2 = 1 - x_0^2$, ovvero per $x_0 = \pm\sqrt{2}/2$, ed in corrispondenza a questa scelta $\|\omega_1\|_\infty = 1/2$.

b) Si ha, dalla stima generale di errore:

$$|E_1(x)| \leq \frac{\sup_{[-1,1]} |\sin(x)| \|\omega_1\|_\infty}{2} = \frac{\sin 1}{4} \approx 0.21$$

c) Nel caso generale si ottiene invece la stima

$$|E_1(x)| \leq \frac{\sup_{[-1,1]} |\sin(x)| 2^2}{2} = 2 \sin 1 \approx 1.683$$

Esercizio 4.

b) Il metodo di Crank–Nicolson per il sistema in questione ha la forma (implicita)

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h[1/2(ax_k + by_k) + 1/2(ax_{k+1} + by_{k+1})] \\ y_{k+1} = y_k + h[1/2(cx_k + dy_k) + 1/2(cx_{k+1} + dy_{k+1})] \end{cases}$$

che in forma matriciale corrisponde a

$$\begin{pmatrix} 1 - ah/2 & -bh/2 \\ -ch/2 & 1 - dh/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ah/2 & bh/2 \\ ch/2 & 1 + dh/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

Invertendo la matrice del sistema si ottiene infine la soluzione

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{4}{(2 - ah)(2 - dh) - bch^2} \begin{pmatrix} 1 - dh/2 & bh/2 \\ ch/2 & 1 - ah/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + ah/2 & bh/2 \\ ch/2 & 1 + dh/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 04.09.00

Esercizio 1.

a) Enunciare i principali risultati di sensibilita' alle perturbazioni nei sistemi lineari e dare la dimostrazione nel caso piu' semplice (5 punti).

b) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10.442 \\ -10x_1 - 28x_2 = 5.925, \end{cases}$$

e dopo aver specificato una norma opportuna, si calcoli il suo numero di condizionamento $K(A)$ e si maggiori l'errore relativo $\|\delta x\|/\|x\|$ sulla soluzione, sapendo che ogni componente del termine noto é affetta da un errore non maggiore di 10^{-3} (4 punti).

Esercizio 2. Dimostrare la formula di interpolazione di Newton (6 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare che le formule di quadratura di Gauss hanno sempre pesi positivi (4 punti).

b) Approssimare l'integrale improprio

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

mediante una formula di Gauss–Legendre a 5 punti sull'intervallo $[0, 10]$. Dire quale percentuale dell'errore globale é dovuta al fatto di operare su un intervallo finito (3+2 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare la convergenza del metodo di Eulero per Equazioni Differenziali Ordinarie (6 punti).

b) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con $x \in [0, 1]$, trovare il massimo valore del passo h per cui si abbia $|y(kh) - u_k| < 10^{-3}$, $(h = 1/N, k = 1, \ldots, N)$, con u_k dato rispettivamente dalla approssimazione di Eulero e da quella di Heun (3+3 punti).

Suggerimento: utilizzare il fatto che l'errore massimo si ha per $k = N$ (Si saprebbe motivare questa affermazione?).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Dato che l'errore sul termine noto é dato nella norma $\|\cdot\|_\infty$, calcoliamo il numero di condizionamento in questa norma. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -10 & -28 \end{pmatrix} \ , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -3/2 \\ 5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$\|A\|_\infty = \max(3, 38) = 38 \ , \quad \|A^{-1}\|_\infty = \max\left(\frac{31}{2}, \frac{11}{2}\right) = \frac{31}{2} \ , \quad K(A) = 589.$$

Poiché $\|\delta b\|/\|b\| = 10^{-3}/10.442 = 9.577 \cdot 10^{-5}$, si ottiene $\|\delta x\|/\|x\| \leq K(A)\|\delta b\|/\|b\| = 589 \cdot 9.577 \cdot 10^{-5} = 0.0564$.

Esercizio 3.

b) Il risultato, con 8 cifre significative, é $I_5 = 0.99951346$. L'errore, sia assoluto che relativo, é quindi dell'ordine di $5 \cdot 10^{-4}$. D'altra parte,

$$\int_{10}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-10} \approx 4.534 \cdot 10^{-5}.$$

Si puó stimare quindi che l'errore dovuto al troncamento sia dell'ordine del 9% circa sull'errore totale.

Esercizio 4.

b) Nel caso lineare scalare, le approssimazioni fornite dai due metodi possono essere scritte rispettivamente come

$$u_N = (1+h)^{1/h}$$

$$u_N = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h} .$$

Ció porta a considerare le due disequazioni

$$|e - (1+h)^{1/h}| < 10^{-3}$$

$$\left| e - \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h} \right| < 10^{-3}$$

che sono peró irrisolvibili con mezzi elementari. Per tentativi (!) si ottengono per h valori dell'ordine di $7.5 \cdot 10^{-4}$ (corrispondente a circa 1333 passi) per il metodo di Eulero e di $4.8 \cdot 10^{-2}$ (corrispondente a soli 21 passi) per il metodo di Heun.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.09.00

Esercizio 1. Derivare la formula di fattorizzazione di Doolittle di una matrice quadrata A e dire in quale sequenza vanno considerati i suoi elementi (5 punti).

Esercizio 2.

a) Dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti).

b) Costruire la base dei polinomi di Lagrange di secondo grado relativi ai nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (3 punti).

c) Stimare la norma $\|\omega_2\|_\infty$ per il polinomio $\omega_2(x)$ relativo ai nodi del punto precedente (4 punti).

Esercizio 3.

a) Basandosi sui polinomi costruiti nell'esercizio 2.*b*, calcolare i pesi di una formula di quadratura di Newton–Cotes aperta a tre nodi sull'intervallo $[0, 4h]$ (4 punti).

b) Dire qual é il suo ordine di precisione (2 punti).

Esercizio 4.

a) Dato il seguente schema multistep (detto *metodo di Simpson*):

$$u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}[f(x_{j-1}, u_{j-1}) + 4f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})] \qquad (*)$$

dire se appartiene alla classe dei metodi di Adams e dare una interpretazione euristica della sua costruzione (2 punti).

b) Utilizzando l'equazione di Volterra, dimostrare che ha ordine di consistenza 4 (4 punti).

c) Dato il sistema differenziale in $\mathbf{R}^n$:

$$y'(x) = Ay(x)$$

con A definita negativa, scrivere il sistema lineare che va risolto ad ogni passo dello schema (*) per trovare il vettore u_{j+1} e dire se sono necessarie (ed eventualmente quali) condizioni sul passo h perché la matrice di tale sistema sia nonsingolare (2+3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) Il polinomio da considerare é

$$\omega_2(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Se la norma si calcola sull'intervallo $[1,3]$, si tratta unicamente di calcolare il valore di ω_2 nei due punti stazionari, che si ottengono da

$$\omega_2'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

e risultano essere i punti $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}/3$. Si ha di conseguenza

$$\|\omega_2\|_\infty = |\omega_2(x_1)| = |\omega_2(x_1)| \approx 0.385$$

Se invece si calcola la norma sull'intervallo $[0,4]$ vanno considerati anche i valori (di uguale modulo) $\omega_2(0)$ e $\omega_2(4)$ e quindi

$$\|\omega_2\|_\infty = \max(|\omega_2(x_1)|, |\omega_2(0)|) = 6.$$

Esercizio 3.

a) Riferendosi dapprima al caso standard $h = 1$ ed al nodo centrale x_1, si ha

$$w_1 = \int_0^4 L_1(x)dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x - 3)dx = -\frac{4}{3}.$$

Di conseguenza $w_0 = w_2 = 8/3$, e per un h generico:

$$\alpha_1 = -\frac{4h}{3}\ , \quad \alpha_0 = \alpha_2 = \frac{8h}{3}.$$

Esercizio 4.

a, b) Il metodo si puó vedere come una discretizzazione ottenuta applicando la formula di quadratura di Simpson alla equazione di Volterra. La consistenza si dimostra immediatamente applicando la definizione e ricordando che l'errore di quadratura per la formula di Simpson é $O(h^5)$.

c) Per il sistema differenziale in questione, lo schema si scrive

$$u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}[Au_{j-1} + 4Au_j + Au_{j+1}]$$

che mettendo in evidenza l'incognita u_{j+1} fornisce il sistema

$$\left(I - \frac{h}{3}A\right) u_{j+1} = \left(I + \frac{h}{3}A\right) u_{j-1} + \frac{4h}{3}Au_j$$

la cui matrice é sicuramente nonsingolare in quanto somma di matrici definite positive.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 05.02.01

Esercizio 1.

a) Esporre il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale e totale (5 punti).

b) Calcolarne la complessitá, sempre nei due casi (4 punti).

Esercizio 2.

a) Dimostrare la esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore (6 punti).

b) Enunciare il teorema di maggiorazione dell'errore e discutere le varie possibilita' di infittimento dei nodi (3 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare l'ordine di precisione delle formule di quadratura di Gauss (6 punti).

b) Approssimare l'integrale

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

mediante una formula di Gauss–Legendre a 5 nodi (3 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare la stabilita' assoluta del metodo di Crank–Nicolson per Equazioni Differenziali Ordinarie (4 punti).

b) Dato il sistema differenziale (oscillatore armonico)

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

e la sua approssimazione di Crank–Nicolson (u_k, v_k), dimostrare che l'approssimazione considerata conserva la norma euclidea, ovvero che $u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 = u_k^2 + v_k^2$ (5 punti).

Suggerimento: scrivere il sistema lineare che definisce (u_{k+1}, v_{k+1}) e quadrare membro a membro.

Soluzioni

Esercizio 3.

b) I nodi ed i pesi, calcolati con sei decimali e riportati all'intervallo $[0, \pi]$, sono:

$$x_0 = 0.147374, \quad \alpha_0 = 0.372164$$

$$x_1 = 0.724971, \quad \alpha_1 = 0.751829$$

$$x_2 = 1.570796, \quad \alpha_2 = 0.893609$$

$$x_3 = 2.416621, \quad \alpha_3 = 0.751829$$

$$x_4 = 2.994219, \quad \alpha_4 = 0.372164$$

ed in conseguenza di questo il valore della quadratura é (sempre con sei decimali) $I_4 = 2.000003$.

Esercizio 4.

b) Appplicando il metodo di Crank–Nicolson al sistema si ottiene:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}[v_k + v_{k+1}] \\ v_{k+1} = v_k + \frac{h}{2}[-u_k - u_{k+1}], \end{cases}$$

che messo in forma di sistema lineare dá

$$\begin{cases} u_{k+1} - \frac{h}{2}v_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}v_k \\ \frac{h}{2}u_{k+1} + v_{k+1} = -\frac{h}{2}u_k + v_k. \end{cases}$$

Quadrando membro a membro come suggerito, si ha

$$\begin{cases} u_{k+1}^2 - hu_{k+1}v_{k+1} + \frac{h^2}{4}v_{k+1}^2 = u_k^2 + hu_kv_k + \frac{h^2}{4}v_k^2 \\ \frac{h^2}{4}u_{k+1}^2 + hu_{k+1}v_{k+1} + v_{k+1}^2 = \frac{h^2}{4}u_k^2 - hu_kv_k + v_k^2 \end{cases}$$

ed infine, sommando le due equazioni,

$$\left(1 + \frac{h^2}{4}\right)(u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2) = \left(1 + \frac{h^2}{4}\right)(u_k^2 + v_k^2).$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN3) – 05.04.01

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica per un metodo iterativo del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ (5 punti).

b) Dato un reale $a > 0$, scrivere un metodo di Newton che ne approssimi la radice quadrata (4 punti).

c) Con riferimento al punto precedente, indicare una scelta di x_0 in funzione di a in modo che il metodo sia convergente (2 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre la strategia del minimo residuo per la soluzione di un sistema di equazioni nonlineari $f(x) = 0$ ($f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) (4 punti).

b) Esporre brevemente i principali metodi per la soluzione di sistemi di equazioni nonlineari (inclusi quelli applicabili alla formulazione di minimo residuo), discutendone vantaggi e svantaggi ed indicandone i campi tipici di applicabilitá (6 punti).

Esercizio 3. Sia $\varphi(\beta) = f(x_k + \beta d_k)$ la funzione da minimizzare nel passo di ricerca unidimensionale di un metodo di discesa. Si supponga che φ é nota in tre punti (determinati, ad esempio, da un procedimento di bisezione)

$$\varphi_0 = \varphi(a)\ , \quad \varphi_2 = \varphi(b)\ , \quad \varphi_1 = \varphi(c) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Supponendo di approssimare il valore di $\varphi(\beta)$ con la sua interpolata quadratica costruita sui punti $(a, \varphi_0), (b, \varphi_2), (c, \varphi_1)$, si trovi l'espressione approssimata del passo β_k ottenuta minimizzando l'interpolata al posto della φ originale (6 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo di penalizzazione per problemi di minimizzazione vincolata (5 punti).

b) Scrivere una formulazione penalizzata del problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + 3(x_2 + 2)^2\ , \quad S = \{x \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1\} \qquad (*)$$

discutendo in particolare la convessitá della funzione penalizzata f_ε (3 punti);

c) Descrivere un metodo primale per la soluzione di (*) (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La radice quadrata di a é la soluzione positiva dell'equazione

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

per la quale il metodo di Newton ha la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Poiché nel semiasse positivo la f é convessa e crescente, per avere convergenza basta prendere $x_0 > \sqrt{a}$, ad esempio $x_0 = \max(1, a)$.

Esercizio 3. Indicando con h la semiampiezza dell'intervallo $[a, b]$, la base di Lagrange relativa ai tre punti in considerazione é

$$L_0(\beta) = \frac{(\beta - b)(\beta - c)}{(a - b)(a - c)} = \frac{\beta^2 - (2a + 3h)\beta + (a + 2h)(a + h)}{2h^2}$$

$$L_1(\beta) = \frac{(\beta - a)(\beta - b)}{(c - a)(c - b)} = -\frac{\beta^2 - (2a + 2h)\beta + a(a + 2h)}{h^2}$$

$$L_2(\beta) = \frac{(\beta - a)(\beta - c)}{(b - a)(b - c)} = \frac{\beta^2 - (2a + h)\beta + a(a + h)}{2h^2}.$$

La derivata del polinomio di Lagrange rispetto a β é data da

$$\varphi_0 L_0'(\beta) + \varphi_1 L_1'(\beta) + \varphi_2 L_2'(\beta) =$$

$$= \frac{\varphi_0}{2h^2}(2\beta - 2a - 3h) - \frac{\varphi_1}{h^2}(2\beta - 2a - 2h) + \frac{\varphi_2}{2h^2}(2\beta - 2a - h) = \cdots =$$

$$= \frac{\beta - a}{h^2}(\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{h^2}(\frac{3h}{2}\varphi_0 - 2h\varphi_1 + \frac{h}{2}\varphi_2).$$

La condizione di annullamento della derivata fornisce quindi

$$\beta = a + h\frac{\frac{3}{2}\varphi_0 - 2\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2}{\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2}.$$

Esercizio 4.

b) Si puó porre ad esempio

$$f_\varepsilon(x) = (x_1 - 1)^2 + 3(x_2 + 2)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left[(|x_1| - 1)^{+2} + (|x_2| - 1)^{+2}\right]$$

ed in questo caso la funzione penalizzata é somma di termini convessi e risulta quindi convessa.

b) Un possibile metodo primale per problemi in questa forma é il metodo di rilassamento con proiezione.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN3) – 28.05.01

Esercizio 1. Descrivere le principali strategie per il calcolo di autovalori di matrici simmetriche (5 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di approssimazione del primo autovalore tramite l'algoritmo delle potenze (6 punti).

b) Discuterne gli aspetti computazionali e le varianti principali (5 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di Lax–Richtmeyer sulla convergenza delle approssimazioni semidiscrete (6 punti).

Esercizio 4. Dato il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \varepsilon u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) & \text{in } (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

a) si semidiscretizzi (*) mediante differenze finite nella forma $\dot{U} = A_h U$ (4 punti);

b) si mostri che (indipendentemente da h) la matrice A_h ha autovalori con parte reale negativa o nulla se la derivata prima é approssimata con la differenza all'indietro (4 punti);

c) si mostri che, se la derivata prima é approssimata con la differenza in avanti, perché la matrice A_h abbia autovalori con parte reale negativa o nulla il passo h deve essere legato alla viscositá ε, e si trovi tale relazione (5 punti);

d) si scriva la versione completamente discreta dello schema al punto (*a*) (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 4.

a) Trattando la derivata seconda mediante rapporto incrementale secondo centrato, e la derivata prima con la differenza all'indietro ed in avanti (e limitandosi ai nodi interni), si ottiene rispettivamente

$$\dot{u}_j = \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_{j-1} - \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_j + \frac{\varepsilon}{h^2} u_{j+1}$$

nel caso della differenza all'indietro, e

$$\dot{u}_j = \frac{\varepsilon}{h^2} u_{j-1} - \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_j + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_{j+1}$$

nel caso della differenza in avanti.

b) Nel primo caso i dischi di Gershgorin della matrice A_h hanno centro nei punti

$$a_{ii} = -\frac{2\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}$$

e raggio

$$r_i = \frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{\varepsilon}{h^2} = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}$$

e sono quindi interamente contenuti nel semipiano dei complessi a parte reale negativa.

c) Nel secondo caso i dischi hanno centro

$$a_{ii} = -\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h}$$

e raggio

$$r_i = \frac{\varepsilon}{h^2} + \left|\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right|.$$

In questo caso, perché i dischi siano interamente contenuti nel semipiano a parte reale negativa é necessario che

$$-\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{\varepsilon}{h^2} + \left|\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right| \le 0,$$

condizione soddisfatta se e solo se $h \le \varepsilon$. Si osserva quindi che l'introduzione di un termine di secondo ordine permette allo schema di restare stabile (a patto che il passo h sia abbastanza piccolo) anche se la differenza prima é effettuata dalla parte "sbagliata".

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 09.11.01

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi per la soluzione di equazioni nonlineari in $\mathbf{R}$, con enfasi particolare sui metodi che non richiedono il calcolo delle derivate e sulle proprietá di convergenza (6 punti).

b) Si supponga di dover approssimare, nell'intervallo $[0, 5]$ le radici della equazione

$$\sin\frac{1}{x} = 0$$

mediante il metodo delle corde, preceduto da una fase di tabulazione con passo $\Delta x = 0.01$. Si supponga inoltre che il metodo delle corde venga direttamente applicato su ogni sottointervallo di tabulazione in cui avviene un cambio di segno della funzione. Basandosi sul fatto che in ogni sottointervallo ci sia un solo cambio di segno e sulla contrattivitá del metodo delle corde, stimare quante radici vengono calcolate in modo attendibile (6 punti).

Esercizio 2.

a) Scrivere esplicitamente il metodo di Horner per il calcolo delle radici del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ (4 punti).

b) Dare un punto iniziale x_0 per il quale il metodo sia sicuramente convergente (3 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di discesa del gradiente con ricerca esatta (6 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere il metodo del rilassamento proiettato ed enunciarne il teorema di convergenza (4 punti).

b) Scrivere esplicitamente il metodo del rilassamento proiettato per il problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = (x_1 + 5)^2 + 5(x_2 - 2)^2 + x_1 x_2 \ , \quad S = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 0\}$$

discutendo preventivamente la sua applicabilitá (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Si ha $b_3(z) = 1$, $b_2(z) = 2 + b_3(z)z$, $b_1(z) = 1 + b_2(z)z$, $b_0(z) = 3 + b_1(z)z$. La iterazione, una volta calcolati $b_3(x_k), \ldots, b_0(x_k)$, ha poi la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b_0(x_k)}{b_1(x_k) + b_2(x_k)x_k + b_3(x_k)x_k^2}.$$

b) A destra dell'ultima radice la funzione é sicuramente crescente e convessa, quindi se si sceglie x_0 in questa regione lo schema converge in modo monotono. Applicando ad esempio il teorema di Cauchy sugli zeri di polinomi, si ottiene che poiché tutti gli zeri z di $f(x)$ soddisfano

$$|z| \leq 1 + \max_{k \neq n} \frac{|a_k|}{|a_n|} = 1 + \max(2, 1, 3) = 4,$$

una buona scelta potrebbe essere $x_0 = 4$. Ragionando in modo analogo per la regione a sinistra della prima radice (dove la funzione é crescente e concava), si potrebbe scegliere allo stesso modo $x_0 = -4$.

Esercizio 4.

b) Si tratta di verificare che la funzione (che é quadratica) sia convessa. Poiché la matrice hessiana

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

é definita positiva, la funzione é effettivamente convessa e coercitiva ed il metodo del rilassamento proiettato converge se applicato a questo problema. Per scrivere esplicitamente il metodo, si calcola alternativamente l'unico zero di ognuna delle due derivate parziali, che valgono:

$$f_{x_1} = 2x_1 + x_2 + 10$$

$$f_{x_2} = 10x_2 + x_1 - 20$$

ottenendo quindi l'iterazione

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = P_{[-\infty,1]}\left(-\dfrac{x_2^{(k)}}{2} - 5\right) \\ x_2^{(k+1)} = P_{[-1,0]}\left(-\dfrac{x_1^{(k+1)}}{10} + 2\right). \end{cases}$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 10.01.02

Esercizio 1.

a) Dare la forma generale degli schemi di Runge–Kutta di secondo ordine e dimostrare le condizioni che portano all'ordine di consistenza massimo (6 punti);

b) Enunciare la forma dello schema di Runge–Kutta di quarto ordine (2 punti).

Esercizio 2.

a) Formulare la nozione di stabilita' assoluta di uno schema numerico per Equazioni Differenziali Ordinarie (3 punti);

Considerato lo schema a piu' passi:

$$u_{k+1} = u_{k-1} + \frac{h}{2}(f(x_{k-1}, u_{k-1}) + 2f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}))$$

b) se ne discuta la stabilita' assoluta utilizzando soluzioni elementari della forma $u_k = \rho^k$ (5 punti);

c) si scriva un metodo di sostituzioni successive per la soluzione dello schema implicito e si calcoli, in funzione della costante di Lipschitz L della funzione f, il massimo passo h per cui é garantita la convergenza del metodo delle sostituzioni successive (2+3 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare (per la sola parte della sufficienza) il teorema di Lax–Richtmeyer per le approssimazioni semi–discrete (6 punti).

Esercizio 4.

a) Formulare la nozione di consistenza per uno schema alle differenze per Equazioni a Derivate Parziali (4 punti);

b) Supponendo di approssimare la derivata spaziale con l'operatore alle differenze

$$u_x(x_j) \approx a_{-1}u_{j-1} + a_0 u_j + a_1 u_{j+1},$$

si determinino i coefficienti incogniti a_{-1}, a_0 e a_1 in modo che l'ordine di consistenza sia massimo, e si dica qual é questo ordine (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Riferendosi al problema modello $y' = -\lambda y$ e ponendo $h\lambda = t$, l'equazione caratteristica associata allo schema in questione risulta essere

$$\left(1+\frac{t}{2}\right)\rho^2 + t\rho + \left(\frac{t}{2}-1\right) = 0$$

che fornisce le soluzioni

$$\rho = \frac{-t \pm 2}{t+2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{2-t}{2+t} < 1. \end{cases}$$

Lo schema proposto é quindi ai limiti di stabilitá assoluta, ma non presenta componenti divergenti nella soluzione.

c) L'iterazione con cui viene calcolata la soluzione ad ogni passo ha in questo caso la forma

$$u_{k+1}^{(n+1)} = u_k + \frac{h}{2}[f(x_{k-1}, u_{k-1}) + 2f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})]$$

e la costante di Lipschitz del secondo membro rispetto alla variabile u_{k+1} vale $L_T = hL/2$. Di conseguenza il passo h deve soddisfare la condizione $h < 2/L$.

Esercizio 4.

b) Sostituendo $u(x_{j-1})$ e $u(x_{j+1})$ con i loro sviluppi di Taylor di centro x_j (per motivi che saranno chiari a posteriori gli sviluppi devono essere almeno di secondo ordine)

$$a_{-1}u(x_{j-1}) + a_0u(x_j) + a_1u(x_{j+1}) =$$

$$= a_{-1}\left(u(x_j) - hu_x(x_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_j) + O(h^3)\right) + a_0u(x_j) +$$

$$+ a_1\left(u(x_j) + hu_x(x_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_j) + O(h^3)\right) =$$

$$= (a_{-1} + a_0 + a_1)u(x_j) + h(a_1 - a_{-1})u_x(x_j) + \frac{h^2}{2}(a_{-1} + a_1)u_{xx}(x_j) +$$

$$+ a_{-1}O(h^3) + a_0O(h^3) + a_1O(h^3).$$

Questa espressione é quindi una approssimazione consistente della derivata prima sotto le condizioni

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 - a_{-1} = 1/h. \end{cases}$$

Se inoltre si ha

$$a_{-1} + a_1 = 0$$

allora si annulla un ulteriore termine dello sviluppo e l'ordine di consistenza diventa massimo. Queste condizioni portano alla scelta $a_0 = 0$, $a_{-1} = -1/(2h)$, $a_1 = 1/(2h)$ (cosa che corrisponde ad effettuare il rapporto incrementale centrato), e di conseguenza il termine di resto é un $O(h^2)$, ovvero la approssimazione ha ordine di consistenza due.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 13.04.02

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss (4 punti);

b) Derivare dal Metodo di Eliminazione la possibilitá della fattorizzazione LU di una matrice nonsingolare (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo iterativo di Jacobi (5 punti);

dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

discutere, al variare del parametro α, la contrattivitá della iterazione di Jacobi per la sua soluzione

b) nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti);

c) nella norma $\|\cdot\|_1$ (4 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare il teorema di convergenza quadratica per i metodi iterativi nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ (6 punti);

b) Generalizzare il teorema a metodi di ordine superiore a 2 (5 punti);

c) Dimostrare che il seguente metodo (detto *metodo di Steffensen*):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

é di secondo ordine e dare una spiegazione intuitiva del suo funzionamento (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Occorre preventivamente riordinare le righe del sistema lineare scambiando le prime due per ottenere:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Come é noto, la contrattivitá nella norma $\|\cdot\|_\infty$ si ottiene dalla stretta dominanza diagonale, che é verificata per la prima e la terza riga, e per la seconda riga richiede che $|\alpha| > 3$.

c) Ponendo il sistema $(*)$ nella forma di equazione di punto fisso, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 1/3(5 + x_2 - x_3) \\ x_2 = 1/\alpha(1 - x_1 + 2x_3) \\ x_3 = 1/3(-2 + x_1 + x_2). \end{cases}$$

La matrice Jacobiana del secondo membro é data da:

$$J_T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/\alpha & 0 & 2/\alpha \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la condizione di contrattivitá $\|J_T\|_1 < 1$ richiede ancora che $|\alpha| > 3$.

Esercizio 3.

c) Intuitivamente, il metodo di Steffensen, una volta riscritto come

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} f(x_k)$$

equivale a sostituire nel metodo di Newton la derivata $f'(x)$ con il rapporto incrementale, effettuato con l'incremento $f(x_k)$. Se $x_k \to \bar{x}$, con $\bar{x}$ radice di f, allora $f(x_k) \to 0$ e questo rapporto incrementale tende alla derivata $f'(\bar{x})$. Per quanto riguarda il suo ordine di convergenza, si puó applicare il teorema generale, visto al punto a), alla funzione di iterazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f(x + f(x)) - f(x)} f(x).$$

Si ha, con qualche passaggio:

$$g'(x) = 1 - \frac{2f(x)f'(x)(f(x + f(x)) - f(x)) - f(x)^2(f'(x + f(x))(1 + f'(x)) - f'(x))}{(f(x + f(x)) - f(x))^2} \qquad (**)$$

e la condizione $g'(\bar{x}) = 0$ va verificata ovviamente come limite: si tratta quindi di risolvere la forma indeterminata a secondo membro. La maniera piú veloce di farlo é di notare che, per il teorema di Lagrange,

$$f(x + f(x)) - f(x) = f'(\xi)f(x)$$

con $\xi \to \bar{x}$ per $x \to \bar{x}$, che utilizzata in (**) dá:

$$g'(x) = 1 - \frac{2f(x)^2 f'(x)f'(\xi) - f(x)^2(f'(x)^2(1 + o(1)) + f'(x)o(1))}{f'(\xi)^2 f(x)^2} =$$

$$= 1 - \frac{2f'(x)f'(\xi) - (f'(x)^2(1 + o(1)) + f'(x)o(1))}{f'(\xi)^2} \to$$

$$\to 1 - \frac{2f'(\bar{x})^2 - f'(\bar{x})^2}{f'(\bar{x})^2} \to 0$$

in cui si é ancora supposto che la radice $\bar{x}$ sia semplice (cioé $f'(\bar{x}) \neq 0$).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 04.06.02

Esercizio 1.

a) Scrivere la forma del polinomio di Lagrange relativo ad $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ (2 punti);

b) enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore (6 punti).

Esercizio 2. Siano dati i valori di una funzione $f(x)$ tabulati con intervallo costante h nei nodi $x_k = kh$. Si supponga di ricostruire f in un punto generico x per interpolazione cubica utilizzando sempre i quattro nodi (due a destra e due a sinistra) piú vicini ad x.

a) Basandosi sul calcolo degli estremi di ω_3 nell'intervallo di interesse, dare una maggiorazione di errore ottimale per questa approssimazione (5 punti);

b) costruire una formula di quadratura per f su un generico intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ basandosi sui valori nei nodi $x_{k-1}, \ldots, x_{k+2}$ (4 punti);

c) costruire la versione composita della formula di quadratura precedente ed approssimare in questo modo l'integrale

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

con passo $h = \pi/4$ (4 punti);

d) Calcolare una maggiorazione esplicita dell'errore di quadratura e l'errore effettivo per l'integrale del punto (*c*) (2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza di Polya per le formule di quadratura (6 punti);

b) applicare il teorema di Polya alla convergenza delle formule gaussiane dopo aver dimostrato la positivitá dei pesi (5 punti);

c) calcolare con una formula gaussiana a 4 punti l'integrale dell'esercizio 2.*c* (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Se $[x_k, x_{k+1}]$ é l'intervallo in cui si interpola, si tratta di stimare in modo ottimale il valore

$$\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |\omega_3(x)|$$

con $\omega_3(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})$. Conviene, per simmetria, riferirsi alla situazione convenzionale in cui $x_{k-1} = -3h/2$, $x_k = -h/2$, $x_{k+1} = h/2$, $x_{k+2} = 3h/2$. In questo caso il polinomio ω_3 é pari ed ha la forma

$$\omega_3(x) = (x^2 - h^2/4)(x^2 - 9h^2/4)$$

e nell'intervallo di interesse $[-h/2, h/2]$ il suo massimo é chiaramente ottenuto in $x = 0$. Poiché $\omega_3(0) = 9h^4/16$, si ottiene finalmente la stima

$$|E_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)||\omega_3(x)|}{4!} \leq \frac{3h^4}{128} \max |f^{(4)}(x)|$$

b) Conviene porre ulteriormente $h = 1$ e sfruttare la simmetria dei pesi, per la quale si ha $w_0 = w_3$, $w_1 = w_2$, e $\sum_i w_1 = 1$. Calcolando per esempio w_2, si ha:

$$L_2(x) = \frac{(x + 1/2)(x + 3/2)(x - 3/2)}{(1/2 + 3/2)(1/2 - 3/2)} = \cdots = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{9}{16}$$

da cui si ottiene

$$w_2 = w_1 = \int_{-1/2}^{1/2} L_2(x)dx = \cdots = \frac{13}{24}$$

$$w_0 = w_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{26}{24}\right) = -\frac{1}{24}.$$

La formula di quadratura cercata é quindi

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{24}(-f(x_{k-1}) + 13f(x_k) + 13f(x_{k+1}) - f(x_{k+2})).$$

c) Per brevitá, diamo la formula direttamente come viene applicata nella valutazione dell'integrale. Indicando con $x_0, \ldots, x_4$ i nodi appartenenti all'intervallo $[0, \pi]$, e con x_{-1}, x_5 gli ulteriori nodi adiacenti che vengono utilizzati dalla formula di quadratura, si ha:

$$I_{3,4} = \frac{h}{24}[-f(x_{-1}) + 12f(x_0) + 25f(x_1) + 24f(x_2) + 25f(x_3) + 12f(x_4) - f(x_5)]$$

(piú in generale, per un numero qualsiasi di nodi, ogni nodo che ha almeno due nodi a destra e due a sinistra appartenenti all'intervallo di integrazione apparirá nella formula di quadratura con lo stesso peso di x_2). Applicando questa formula di quadratura all'integrale proposto, e lavorando con sei cifre significative, si ottiene

$$I_{3,4} = 1.988679.$$

d) Poiché il valore esatto dell'integrale é $I = 2$, l'errore dello schema é $|I - I_{3,4}| = 2 - 1.988679 = 0.011321$. Una maggiorazione esplicita si puó invece ottenere dall'errore di interpolazione calcolato al punto $2.a$, e piú esattamente

$$|I - I_{3,4}| \leq \pi \|E_3\|_\infty \leq \frac{3\pi^2}{4 \cdot 128} \max |f^{(4)}(x)| \leq \frac{3\pi^2}{512} \approx 0.05783.$$

Esercizio 3.

c) Si ha, con sei cifre significative, $I_3 = 1.99998$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 10.06.02

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione LU senza pivoting (4 punti);

b) dimostrare la fattorizzabilitá di una matrice nonsingolare a meno di permutazioni (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica (o, piú in generale, di ordine n) per i metodi di sostituzioni successive del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$, ed applicarlo all'analisi del metodo di Newton (6 punti);

b) utilizzando il risultato precedente, dimostrare che se $\bar{x}$ é una radice doppia, il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge con ordine quadratico se f é abbastanza regolare (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton per il polinomio interpolatore relativo a $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ (6 punti);

b) costruire la tavola delle differenze della funzione $f(x) = 1/x$, con passo $h = 1$ sui nodi $x_0 = 1, \ldots, x_4 = 5$. Lavorare con quattro cifre significative segnalando quali differenze divise presentino perdita di cifre per sottrazione (4 punti);

c) dimostrare che data una funzione $f(x)$ lipschitziana, tabulata con passo costante h, si ha:

$$|f[x_j, x_{j+1}]| \le L$$

$$\vdots$$

$$|f[x_j, \ldots, x_{j+k}]| \le \frac{2^{k-1}L}{k!h^{k-1}}$$

dove L é la costante di Lipschitz di f (6 punti).

Esercizio 4. Riferendosi alla situazione dell'esercizio 3.b, ed utilizzando di volta in volta i nodi necessari, approssimare

$$\int_1^5 \frac{dx}{x}$$

mediante le quadrature del punto centrale (semplice), dei trapezi (semplice e composita) e di Simpson (semplice e composita) (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Ricordiamo che dire che $\bar{x}$ é una radice doppia equivale a supporre che $f'(\bar{x}) = 0$, $f''(\bar{x}) \neq 0$. Ponendo quindi

$$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ed intendendo ovviamente la condizione $g'(\bar{x}) = 0$ come un limite, si ha

$$g'(x) = 1 - 2\frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

da cui passando al limite ed applicando due volte il teorema di De L'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to\bar{x}} g'(x) = 1 - 2\lim_{x\to\bar{x}} \frac{2f'(x)f''(x) - f'(x)f''(x) - f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)} =$$

$$= 1 - 2\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f''(x)^2 + f'(x)f'''(x) - f'(x)f'''(x) - f(x)f''''(x)}{2f''(x)^2 + 2f'(x)f'''(x)} =$$

$$= 1 - 2\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f''(x)^2 - f(x)f''''(x)}{2f''(x)^2 + 2f'(x)f'''(x)} = 0$$

in cui si é anche usata la condizione di radice doppia nell'ultimo passaggio.

Esercizio 3.

b) Le differenze divise di $f(x)$, calcolate con quattro cifre significative, sono:

$$f[x_0, x_1] = -0.5$$

$$f[x_1, x_2] = -0.1667$$

$$f[x_2, x_3] = -0.0833(*)$$

$$f[x_3, x_4] = -0.05$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 0.1666$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = 0.0416(*)$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = 0.0166(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.0417(*)$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = -0.0083(**)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.0083(**)$$

dove si sono indicate rispettivamente con $(*)$ e $(**)$ la perdita di una e di due cifre significative.

c) Si puó procedere per induzione. Notiamo intanto che la condizione

$$|f[x_j, x_{j+1}]| \leq L$$

é sicuramente soddisfatta, poiché il primo membro non é altro che un rapporto incrementale di f. D'altra parte, se per ogni j si ha

$$|f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]| \leq \frac{2^{k-2} L}{(k-1)! h^{k-2}},$$

allora dalla definizione di differenza divisa si ottiene la maggiorazione

$$|f[x_j, \ldots, x_{j+k}]| \leq \frac{|f[x_j, \ldots, x_{j+k-1}]| + |f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}]|}{kh} \leq$$

$$\leq \frac{2}{kh} \frac{2^{k-2} L}{(k-1)! h^{k-2}} = \frac{2^{k-1} L}{k! h^{k-1}}.$$

Esercizio 4. Applicando le formule di quadratura indicate e calcolando $f(x) = 1/x$ con quattro cifre significative, si ha per la formula del punto centrale ($h = 2$):

$$I_0 = 4f(3) = 1.3332$$

mentre per la formula dei trapezi, rispettivamente semplice ($h = 4$) e composita ($h = 1$):

$$I_1 = 2[f(1) + f(5)] = 2.4$$

$$I_{1,4} = \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{1}{2} f(5) = 1.6833$$

e per la formula di Simpson semplice ($h = 2$) e composita ($h = 1$):

$$I_2 = \frac{2}{3}[f(1) + 4f(3) + f(5)] = 1.6888$$

$$I_{2,2} = \frac{1}{3}[f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + f(5)] = 1.6222.$$

Ricordiamo che il valore esatto é $I = \log 5 \approx 1.6094$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 11.07.02

Esercizio 1.

a) Derivare la formula di calcolo della fattorizzazione di Cholesky per una matrice $A > 0$ (4 punti);

b) dire per quali valori di α é fattorizzabile nella forma di Cholesky la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere sinteticamente i principali metodi iterativi lineari o sopralineari per equazioni $f(x) = 0$ (5 punti);

b) scrivere un diagramma di flusso per l'algoritmo "regula falsi" (3 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare l'esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore (6 punti);

b) costruire il polinomio interpolatore nella forma di Lagrange o Newton per la funzione $f(x) = x^4$ con i nodi $x_k = 1, 2, 3, 4, 5$ e grado $n = 1, 2, 3, 4$ (4 punti).

Esercizio 4.

a) Costruire la formula di Newton–Cotes aperta a tre nodi (4 punti);

b) Discutere il grado di precisione delle formule di N–C chiuse ed aperte a seconda del numero di nodi (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Occorre verificare che il determinante dei minori principali sia nonnegativo. Per il minore di ordine 1 la cosa é ovvia, mentre per il minore di ordine 2 si ha la condizione $\alpha^2 \leq 5$, ovvero

$$-\sqrt{5} \leq \alpha \leq \sqrt{5}.$$

Per il minore di ordine 3 (la matrice completa) si ottiene la condizione $3\alpha^2 \leq 11$, ovvero

$$-\sqrt{\frac{11}{3}} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{11}{3}},$$

disuguaglianza che include anche la precedente.

Esercizio 3.

b) Dovendo scrivere i polinomi interpolatori di grado crescente, conviene utilizzare la forma di Newton. Le differenze divise di interesse sono:

$$\begin{aligned} f[1] &= 1, \\ f[1,2] &= 16, \\ f[1,2,3] &= 24.5, \\ f[1,2,3,4] &= 10.1\bar{6}, \\ f[1,2,3,4,5] &= 0.958\bar{3}. \end{aligned}$$

I polinomi interpolatori richiesti sono quindi

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) &= 1 + 16(x-1) \\ \Pi_2(x) &= 1 + 16(x-1) + 24.5(x-1)(x-2) \\ \Pi_3(x) &= 1 + 16(x-1) + 24.5(x-1)(x-2) + 10.1\bar{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\ \Pi_4(x) &= 1 + 16(x-1) + 24.5(x-1)(x-2) + 10.1\bar{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad + 0.958\bar{3}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

Esercizio 4.

a) Ci si puó porre per comoditá nell'intervallo di riferimento $[-2,2]$, con passo unitario tra i nodi. Poiché la formula é a nodi simmetrici, basterá calcolare uno solo dei pesi, ad esempio il peso w_1 relativo al nodo centrale $x_1 = 0$. Si ha

$$L_1(x) = 1 - x^2$$

da cui

$$w_1 = \int_{-2}^{2} L_1(x)dx = \ldots = 4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Di conseguenza gli altri pesi avranno il valore

$$w_0 = w_2 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 09.01.03

Esercizio 1.

a) Formulare le nozioni di consistenza, stabilitá e convergenza di uno schema ad un passo per Equazioni Differenziali Ordinarie della forma $y' = f(x, y)$ (4 punti);

b) Dimostrare la consistenza dei metodi di Eulero esplicito e di Crank–Nicolson (4 punti);

c) Scrivere un metodo Predictor–Corrector basato sull'accoppiamento di questi due schemi, in cui la soluzione dello schema implicito venga effettuata con il metodo di Newton (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo espliciti nella forma

$$u_{k+1} = u_k + h\Phi(x_k, u_k)$$

(6 punti);

b) Dimostrare la lipschitzianitá della funzione Φ nei metodi di Runge–Kutta del secondo ordine e stimare la costante di Lipschitz di Φ in funzione di quella di f (3+2 punti);

c) Dimostrare che la lipschitzianitá della funzione Φ implica la stabilitá dello schema (5 punti).

Esercizio 3. Si consideri l'equazione del trasporto $u_t + au_x = 0$, con $a > 0$, ed uno schema di tipo upwind basato sulla approssimazione

$$u_x(x_j) \approx a_0 u_j + a_1 u_{j-1} + a_2 u_{j-2}.$$

a) Si determinino i coefficienti incogniti a_i in modo da ottenere uno schema del secondo ordine (4 punti);

b) Si dia una stima sugli autovalori della matrice A_h associata alla approssimazione semidiscreta, considerandola matrice a banda (2 punti);

c) Dopo aver ulteriormente discretizzato rispetto al tempo mediante il metodo di Eulero esplicito, si calcoli il dominio di dipendenza discreto dello schema e si dia la condizione CFL necessaria per la sua stabilitá (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) L'equazione da risolvere ad ogni passo del metodo implicito, indicandone con t l'incognita u_{k+1}, é data da

$$F(t) = t - u_k - \frac{h}{2}[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, t)] = 0,$$

e poiché, ponendosi per semplicitá nella condizione di equazione scalare,

$$F'(t) = 1 - \frac{h}{2} f_y(x_{k+1}, t),$$

il metodo predictor–corrector con N iterazioni di Newton ha la forma

$$\begin{cases} u_{k+1}^{(0)} = u_k + hf(x_k, u_k) & \text{(predictor);} \\ u_{k+1}^{(n+1)} = u_{k+1}^{(n)} - \dfrac{u_{k+1}^{(n)} - u_k - \frac{h}{2}[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})]}{1 - \frac{h}{2} f_y(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)}))} & \text{(corrector);} \\ u_{k+1} = u_{k+1}^{(N)}. \end{cases}$$

Esercizio 2.

b) Dato un generico metodo di RK a due stadi (e per semplicitá considerando il caso scalare e tralasciando la dipendenza da x, visto che si é implicitamente supposta globalmente lipschitziana la f), la funzione Φ é data da

$$\Phi(u, h) = a_1 f(u) + a_2 f(u + bhf(u))$$

da cui si ottiene

$$\Phi_u(u, h) = a_1 f_y(u) + a_2 f_y(u + bhf(u))(1 + bhf_y(u)).$$

Considerato che per ipotesi $|f_y| \le L_f$, si ottiene

$$|\Phi_u| \le a_1 L_f + a_2 L_f (1 + bhL_f) = (a_1 + a_2)L_f + a_2 bhL_f^2 = L_\Phi$$

(si osservi che questa costante di Lipschitz resta effettivamente limitata per h limitato). In particolare, sotto le condizioni che garantiscono il secondo ordine di consistenza, si ha

$$L_\Phi = L_f + \frac{h}{2} L_f^2.$$

c) Tralasciando ancora la dipendenza da x, ed applicando la definizione di stabilitá, si considerano le due successioni

$$u_{k+1} = u_k + h\Phi(u_k)$$

$$v_{k+1} = v_k + h\Phi(v_k).$$

Si ha:

$$|u_{k+1} - v_{k+1}| \leq |u_k - v_k| + h|\Phi(u_k) - \Phi(v_k)| \leq (1 + hL_\Phi)|u_k - v_k|$$

ottenendo infine, in modo analogo a quanto visto nella dimostrazione del teorema di convergenza,

$$|u_{k+1} - v_{k+1}| \leq e^{L_\Phi(\bar{x}-x_0)}|u_0 - v_0|$$

per $1 \leq k+1 \leq (\bar{x} - x_0)/h$, ovvero la stabilitá.

Esercizio 3.

a) Esprimendo i valori $u(x_{j-1})$, $u(x_{j-2})$ con uno sviluppo di Taylor di secondo ordine di centro x_j, si ottiene

$$a_0 u(x_j) + a_1 u(x_{j-1}) + a_2 u(x_{j-2}) =$$

$$= a_0 u(x_j) + a_1 \left(u(x_j) - h u_x(x_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_j) + O(h^3) \right) +$$

$$+ a_2 \left(u(x_j) - 2h u_x(x_j) + \frac{4h^2}{2} u_{xx}(x_j) + O(h^3) \right) =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2) u(x_j) - h(a_1 + 2a_2) u_x(x_j) + \frac{h^2}{2}(a_1 + 4a_2) u_{xx}(x_j) +$$

$$+ a_0 O(h^3) + a_1 O(h^3) + a_2 O(h^3).$$

La approssimazione ha quindi il secondo ordine di consistenza sotto le condizioni

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = -1/h \\ a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione é $a_0 = 3/(2h)$, $a_1 = -2/h$, $a_2 = 1/(2h)$.

b) I dischi di Gershgorin hanno centro nel punto $-3a/(2h)$ e raggio $5a/(2h)$. Da questa analisi non si puó quindi concludere che la matrice A_h abbia solo autovalori con parte reale negativa.

c) Nella versione discretizzata in tempo il dominio di dipendenza numerico si allarga di due punti a sinistra ad ogni passo in tempo. La condizione CFL che ne risulta é quindi

$$\frac{k}{h} < \frac{2}{a}.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 03.02.03

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione di Cholesky e calcolarne la complessitá (5 punti);

b) con riferimento al problema di calcolare la soluzione di un sistema lineare con matrice simmetrica definita positiva, dire quali tra gli algoritmi studiati sono applicabili e confrontarne l'efficienza nel caso specifico (3 punti).

Esercizio 2.

a) Presentare i principali metodi iterativi per la soluzione di una equazione scalare non-lineare, comparandone in particolare la velocitá di convergenza (5 punti);

b) costruire un metodo iterativo (con un'opportuna approssimazione iniziale) convergente per approssimare la soluzione dell'equazione

$$\cos x - x = 0$$

(3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la maggiorazione dell'errore di interpolazione per un polinomio interpolatore relativo a $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ (6 punti);

b) descrivere la strategia di approssimazione composita e derivare dalla formula generale del punto (a) la relativa stima di errore (3 punti);

c) lavorando a nodi equidistanti e con una approssimazione di secondo grado a tratti, dire quanti nodi occorre utilizzare per approssimare la funzione $f(x) = \sin x$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ con un errore minore di 10^{-3} (5 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema relativo al grado di precisione delle formule di quadratura gaussiane (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) L'equazione si puó porre immediatamente nella forma di punto fisso

$$x = \cos x$$

per cui una possibile procedura iterativa di sostituzioni successive potrebbe essere

$$x_{k+1} = \cos x_k.$$

Si puó notare che poiché $\sup |g'(x)| = 1$ il secondo membro *non é una contrazione su tutto R*. Questo peró non é un problema se si pone x_0 in modo che $\bar{x} < x_0 < \pi/2$ (con $\bar{x}$ soluzione dell'equazione) in modo da evitare il punto $\pi/2$ in cui $g'(x) = 1$. In questo modo $\cos x$ é una contrazione nell'intorno sferico $|x - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}|$. Un'altra maniera di costruire una iterazione convergente é mediante il metodo di Newton, ponendo

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\cos x_k - x_k}{\sin x_k}.$$

Anche in questo caso una buona approssimazione iniziale puó essere scelta nell'intervallo $[\bar{x}, \pi/2]$, in cui la funzione $\cos x - x$ é decrescente e concava (in queste condizioni, come é noto, il metodo di Newton converge in modo monotono). Il valore della radice, con sei decimali esatti, é

$$\bar{x} = 0.739085.$$

Esercizio 3.

c) Indicando con h il passo tra i nodi e con m il numero di sottointervalli (di ampiezza $2h$) in cui si divide l'intervallo $[-\pi, \pi]$, si ha $h = \pi/m$ ed il numero di nodi é $2m + 1$. Applicando la stima di errore piú semplice si ha

$$|f - \Pi_2| \le \frac{8 \sup |f'''|}{3!}\, h^3 = \frac{4}{3}\, h^3$$

da cui si ottiene

$$h \le \left(\frac{3 \cdot 10^{-3}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.09086$$

che corrisponderebbe, tenendo conto che il numero di nodi deve essere dispari, a 71 nodi. Se invece si stima la quantitá $\|\omega_2\|_\infty$, che compare nella maggiorazione di errore, piú precisamente (ad esempio come nell'esercizio 2 del 29.09.99), si ottiene

$$\|\omega_2\|_\infty = \frac{2h^3}{3\sqrt{3}}$$

da cui

$$|f - \Pi_2| \le \frac{2 \sup |f'''|}{3! 3\sqrt{3}}\, h^3 = \frac{h^3}{9\sqrt{3}}.$$

Per questa strada la condizione su h diviene

$$h \le \left(9\sqrt{3} \cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.2498$$

che corrisponde piú realisticamente a 27 nodi.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 17.04.03

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione LU senza pivoting e calcolarne la complessitá (5 punti).

Dato il sistema lineare $Ax = b$ con matrice simmetrica e definita positiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 125 \end{pmatrix},$$

b) calcolare le fattorizzazioni LU e di Cholesky di A (4 punti);

c) calcolare i numeri di condizionamento dei fattori triangolari nei due casi e maggiorare la perturbazione $\|\delta x\|/\|x\|$ introdotta con la soluzione dei due sistemi triangolari, data $\|\delta b\|/\|b\|$ (4 punti).

Esercizio 2. Esporre le (altre) pricipali strategie per la soluzione di un sistema di equazioni lineari $Ax = b$ confrontandole in termini di complessitá, stabilitá ed occupazione di memoria (6 punti).

Esercizio 3.

a) Esporre il metodo di Newton per la soluzione di equazioni scalari nonlineari, insieme con le sue varianti principali ed i possibili criteri di arresto (5 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

c) supponendo di approssimare il valore $\sqrt{2}$ come soluzione dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0$$

individuare un intervallo in cui ció sia possibile mediante il metodo delle corde, calcolare la costante di contrazione associata a tale intervallo e dire quante iterazioni sono necessarie per calcolare la soluzione con precisione migliore di 10^{-3} (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Come si verifica immediatamente, per la fattorizzazione di Doolittle $A = LU$ si ha

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \,,\; U = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 100 \end{pmatrix},$$

mentre per quella di Cholesky $A = HH^t$ si ottiene

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

c) Osserviamo intanto che se la matrice A é fattorizata nel prodotto BC, allora nella soluzione dei due sistemi lineari

$$Bz = b \,,\;\; Cx = z$$

possiamo stimare la propagazione della perturbazione $\|\delta b\|/\|b\|$ successivamente su z e su x mediante le maggiorazioni

$$\frac{\|\delta z\|}{\|z\|} \le K(B)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le K(C)\frac{\|\delta z\|}{\|z\|} \le K(C)K(B)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

da cui si vede che il condizionamento associato alla soluzione dei due sistemi lineari é il prodotto dei numeri di condizionamento dei fattori B e C. Osserviamo ancora che questa stima mostra come nel procedimento di fattorizzazione e successiva soluzione dei due sistemi, il condizionamento (a meno di essere nella fortunata quanto improbabile situazione in cui $K(B) = K(C) = 1$) non puó che peggiorare. Infatti, poiché $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$, per la submoltiplicativitá della norma matriciale si ha

$$K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = \|BC\|\,\|(BC)^{-1}\| \le \|B\|\,\|C\|\,\|C^{-1}\|\,\|B^{-1}\| = K(B)K(C).$$

Passando ai numeri, nel caso della fattorizzazione LU si ottiene

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \,,\; U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/100 \\ 0 & 1/100 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza, lavorando nella norma matriciale $\|\cdot\|_\infty$,

$$K_\infty(L) = 36 \,,\;\; K_\infty(U) = 105.$$

Nella fattorizzazione di Cholesky, invece,

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad (H^t)^{-1} = (H^{-1})^t,$$

da cui

$$K_\infty(H) = 15\,, \quad K_\infty(H^t) = 15.$$

Il numero globale di condizionamento associato alla soluzione dei due sistemi lineari é quindi di 3780 per la fattorizzazione LU e di 225 (ben piú basso, quindi) per la fattorizzazione di Cholesky. Per confronto, il numero di condizionamento della matrice A vale $K_\infty(A) = 169$.

Esercizio 3.

c) Anche se non é strettamente necessario per la convergenza del metodo, conviene porsi in un intervallo in cui la funzione cambi di segno. La scelta piú semplice é quella dell'intervallo $[1, 2]$. Calcoliamo ora la costante di contrazione del metodo. Poiché $a = 1$ e $b = 2$, il metodo si scrive $x_{k+1} = g(x_k)$ con

$$g(x) = x - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x) = x - \frac{1}{3}(x^2 - 2),$$

e derivando g si ha

$$g'(x) = 1 - \frac{2x}{3}$$

che essendo una funzione lineare, assume il suo massimo modulo in un estremo. Quindi

$$L = \sup_{[1,2]} |g'(x)| = \max(|g'(1)|, |g'(2)|) = \frac{1}{3}$$

(osserviamo che questo giustifica *a posteriori* la scelta dell'intervallo $[1, 2]$). Infine, poiché la radice é interna all'intervallo $[a, b]$, supponendo che anche x_0 lo sia, si ottiene

$$|x_k - \sqrt{2}| \le L^k |x_0 - \sqrt{2}| \le L^k (b - a) = L^k,$$

e la precisione richiesta si raggiunge quando $3^k \ge 1000$, ovvero alla settima iterazione.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 03.06.03

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore relativo ad $n+1$ nodi distinti $x_0, \dots, x_n$ utilizzando la forma di Newton (6 punti);

b) scrivere la tabella delle differenze divise relative alla funzione $f(x) = \log x$ ed ai nodi $x_0 = 1, \dots, x_3 = 4$ (4 punti);

c) enunciare la formula di rappresentazione dell'errore e maggiorare l'errore di interpolazione tra i nodi x_1 ed x_2, nella situazione del punto precedente (4 punti).

Esercizio 2. Siano dati, tabulati con intervallo costante h nei nodi $x_k = kh$, i valori delle medie integrali f_k di una funzione $f(x)$ sugli intervalli $[x_k - h/2, x_k + h/2]$. Si supponga di dover ricostruire f in un punto generico x per interpolazione lineare a tratti, utilizzando sempre un nodo a destra ed uno a sinistra di x. Scrivere le condizioni che deve soddisfare ogni singolo tratto della ricostruzione per ottenere medie integrali corrispondenti con quelle di f (6 punti).

Suggerimento: Porre la ricostruzione nella forma $\sum_k u_k \phi_k(x)$ con u_k incognite da determinare e $\phi_k(x_j) = \delta_{kj}$, lineari a tratti.

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle formule di quadratura di Newton–Cotes generalizzate o composite (6 punti);

b) costruire le formule di NC generalizzate basate sulle quadrature:
i) chiusa di grado 1;
ii) chiusa di grado 2;
iii) aperta di grado 0;
iv) aperta di grado 1 (1+1+1+1 punti);

c) approssimare con le formule ottenute nel punto precedente l'integrale

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

suddividendo l'intervallo di integrazione in 2 sottointervalli (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.
b) Le differenze divise di $f(x)$, calcolate con quattro cifre decimali, sono:

$$f[x_0, x_1] = 0.6931$$

$$f[x_1, x_2] = 0.4055$$

$$f[x_2, x_3] = 0.2877$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = -0.1438$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = -0.0589(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.0283(*)$$

dove si é indicata con $(*)$ la perdita di una cifra significativa.

Esercizio 2. Si tratta di verificare che la ricostruzione abbia le stesse medie integrali di f su ogni intervallo $[x_j - h/2, x_j + h/2]$. Messa come suggerito la ricostruzione nella forma $\sum_k u_k \phi_k(x)$, le condizioni da soddisfare sono:

$$\frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \sum_k u_k \phi_k(x) dx = f_j,$$

che si puó riscrivere piú comodamente come

$$\frac{1}{h} \sum_k u_k \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \phi_k(x) dx = f_j.$$

Ponendo per comoditá di notazione

$$a_{jk} = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \phi_k(x) dx,$$

si ottiene quindi il sistema lineare (nelle incognite u_k)

$$\sum_k a_{jk} u_k = f_j.$$

D'altra parte, scrivendo piú esplicitamente le funzioni ϕ_k nella forma

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{k-1}) & \text{se } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ -\frac{1}{h}(x - x_{k+1}) & \text{se } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e calcolandone in modo elementare gli integrali, si verifica facilmente che gli unici coefficienti non nulli sulla j–esima riga sono $a_{j,j-1} = a_{j,j+1} = 1/8$ e $a_{jj} = 3/4$.

Esercizio 3.

c) riportiamo i risultati, con sei cifre decimali, insieme con i nodi usati dalla formula.

i) chiusa di grado 1 (formula dei trapezi):

$$I_{1,2}(f) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \frac{\pi}{2}$$

ii) chiusa di grado 2 (formula di Simpson):

$$I_{2,2}(f) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 0 + \frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{6}\sin\pi\right) \approx 2.004560$$

iii) aperta di grado 0 (formula dei rettangoli):

$$I_{0,2}(f) = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) \approx 2.221441$$

iv) aperta di grado 1:

$$I_{1,2}(f) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6}\right) \approx 2.145748$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 09.06.03

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo iterativo di Jacobi (5 punti);

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 = 3, \end{cases}$$

e supponendo di non riordinarne le righe, discutere al variare dei parametri α e β la contrattivitá del metodo di Jacobi

b) nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti);

c) nella norma $\|\cdot\|_1$ (4 punti);

Esercizio 2. Basandosi sulla forma del polinomio di Newton di secondo grado relativo ai nodi x_{k-2}, x_{k-1} e x_k, costruire il metodo di Müller per la soluzione di equazioni scalari, esprimendo x_{k+1} come zero di $\Pi_2(x)$ (6 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare le stime di errore in funzione del passo h per le approssimazioni polinomiali composite di grado generico n (5 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya sulla convergenza delle formule di quadratura (6 punti);

b) indipendentemente dall'esistenza di risultati di convergenza piú forti, dire (motivando l'affermazione) se la convergenza delle formule di Newton–Cotes composite per gli integrali di funzioni continue puó essere dedotta dal teorema di Polya (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

$b, c)$ La matrice Jacobiana della trasformazione $x_{k+1} = T(x_k)$ é data da

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & -1/10 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha \\ -2/\beta & -1/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione

$$\|B\|_\infty = \max\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{|\alpha|}, \frac{2}{|\beta|}\right) < 1$$

si traduce nella consueta condizione di dominanza diagonale stretta, $|\alpha| > 2$ e $|\beta| > 3$. Nel caso della norma

$$\|B\|_1 = \max\left(\frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|}\right)$$

la condizione $\|B\|_1 < 1$ si traduce nel sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} |\beta| + 2|\alpha| < |\alpha||\beta| \\ |\beta| > 10/9 \\ |\alpha| > 10/9. \end{cases}$$

Si puó osservare che nessuna di queste due condizioni include l'altra. Infatti, ad esempio, la coppia $\alpha = 9/4$, $\beta = 13/4$ soddisfa la condizione di contrattivitá solo nella norma $\|\cdot\|_\infty$, mentre la coppia $\alpha = 4$, $\beta = 3$ soddisfa la condizione di contrattivitá solo nella norma $\|\cdot\|_1$.

Esercizio 2.

Il polinomio interpolatore di Newton della f costruito sui nodi x_{k-2}, x_{k-1}, x_k é

$$\begin{aligned} \Pi_2(x) &= f[x_{k-2}] + f[x_{k-2}, x_{k-1}](x - x_{k-1}) + f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k](x - x_{k-2})(x - x_{k-1}) = \\ &= f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]x^2 + \Big[f[x_{k-2}, x_{k-1}] - f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k](x_{k-2} + x_{k-1})\Big]x + \\ &+ \Big[f[x_{k-2}] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]x_{k-2} + f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]x_{k-2}x_{k-1}\Big] = \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

dove si é posto

$$a = f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k],$$

$$b = f[x_{k-2}, x_{k-1}] - f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k](x_{k-2} + x_{k-1}),$$

$$c = f[x_{k-2}] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]x_{k-2} + f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]x_{k-2}x_{k-1}.$$

La soluzione cercata é quindi data dalla formula risolutiva per equazioni di secondo grado,

$$x_{k+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con a, b e c come definiti sopra. Si potrebbe, e questa é la strada seguita in genere nei testi di Analisi Numerica, effettuare poi manipolazioni algebriche su questa soluzione, ad esempio razionalizzando il quoziente.

Esercizio 4.

b) Ricordiamo che la forma generale delle quadrature di NC composite é

$$I_{n,m}(f, a, b) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{H_j}{l} w_k f(x_k^{(j)})$$

con $l = n$ se la quadratura é chiusa, $l = n + 2$ se la quadratura é aperta. Dalle stime dell'errore di interpolazione composita (ottenute nell'esercizio precedente) si ottiene banalmente la maggiorazione

$$\left| I_{n,m}(f, a, b) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b - a) \frac{\|f^{n+1}\|_\infty H^{n+1}}{(n + 1)!}$$

mediante la quale si puó verificare la seconda ipotesi del teorema di Polya, poiché comunque assegnato un polinomio $p(x)$, la derivata $p^{(n+1)}$ é sicuramente limitata in $[a, b]$, e ne segue che $|I_{n,m}(f, a, b) - \int_a^b f(x)dx| \to 0$ per $H \to 0$. Per verificare la prima ipotesi, notiamo che si tratta di maggiorare uniformemente la somma dei moduli dei pesi, per la quale si ha

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{H_j}{l} w_k \right| = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{m-1} H_j \sum_{k=0}^{n} |w_k| = \frac{b - a}{l} \sum_{k=0}^{n} |w_k|.$$

Per le formule a pesi positivi, $\sum_k |w_k| = l$, per quelle a pesi di segno variabile $\sum_k |w_k| > l$, ma in entrambi i casi il valore della sommatoria dipende solo dalla quadratura utilizzata e non da H. Ne segue che é soddisfatta anche la prima ipotesi del teorema di Polya.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 07.07.03

Esercizio 1.

a) Esporre il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale e totale (5 punti);

b) Derivare dal MEG la fattorizzabilitá LU, a meno di permutazioni di righe, per una matrice nonsingolare (3 punti).

Esercizio 2. Dimostrare che se f é una funzione crescente e convessa che ha lo zero semplice $\bar{x}$, il metodo di Newton applicato alla funzione f converge per ogni approssimazione iniziale $x_0 > \bar{x}$ (6 punti).

Suggerimento: Dimostrare inizialmente che la successione x_k generata dal metodo é monotona e limitata, e poi che ogni suo limite é necessariamente uno zero di f.

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange (5 punti);

b) scrivere la base di Lagrange relativa ai nodi $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ (3 punti);

c) approssimare mediante questi nodi di interpolazione il valore $\cos(\pi/4)$, ponendo $h = \pi/2$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema relativo al grado di precisione delle formule di quadratura di Gauss–Legendre (6 punti);

b) Appossimare

$$\int_{-1}^{1} |x| dx$$

con le formule di Gauss–Legendre a 3, 4, 5 punti e calcolare l'errore di quadratura. Cosa garantisce che le approssimazioni convergano al risultato esatto? (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 3.

c) Si ha $\Pi_2(\pi/2) = 3/4$ (il valore esatto é $\cos \pi/2 = \sqrt{2}/2$).

Esercizio 4.

b) Si ottiene, con sei decimali, $I_2 = 0.860664$, $I_3 = 1.042535$ e $I_4 = 0.944850$ contro un valore esatto di $I = 1$. Nonostante $|I_4 - I| > |I_3 - I|$, ci si aspetta la convergenza delle quadrature numeriche al valore esatto: infatti le quadrature gaussiane soddisfano le ipotesi del teorema di Polya, e la funzione $|x|$ é continua.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.09.03

Esercizio 1. Dato il sistema lineare $Ax = b$ e scritto il metodo di Jacobi ad esso applicato come $x^J_{k+1} = B_J x^J_k$, si consideri il metodo iterativo

$$x_{k+1} = (1-\omega)x_k + \omega B_J x_k. \qquad (*)$$

Data la matrice A come

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) si dica se il metodo di Jacobi é convergente con tale matrice (2 punti);
b) si dica, in funzione di $\omega \in R$, se il metodo $(*)$ é convergente (3 punti).
c) si dia una condizione generale di convergenza per il metodo $(*)$ nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (4 punti).

Esercizio 2.
a) Si enunci e si dimostri il teorema di convergenza quadratica per il metodo di Newton (5 punti);
b) si trovi l'intervallo di convergenza (eventualmente non ottimale) per il metodo di Newton, applicato all'equazione

$$\sin\frac{1}{x} = 0$$

nell'intorno della radice $\bar{x} = 1/\pi$ (4 punti).

Esercizio 3.
a) Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);
b) enunciare il teorema di convergenza per la interpolazione sui nodi di Chebyshev (2 punti).

Esercizio 4.
a) Costruire una formula di quadratura aperta sull'intervallo $[a, b]$ basata sui nodi $x_0 = a + (b-a)/4$ e $x_1 = b - (b-a)/4$ (3 punti);
b) stimare l'errore di quadratura (4 punti);
c) Integrare con questa formula la funzione $f(x) = \sin(x)$ fra 0 e π (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Il metodo di Jacobi é evidentemente convergente trattandosi di una matrice a diagonale dominante.

b) La matrice di iterazione del metodo é:

$$J_T = (1-\omega)I + \omega B_J = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\omega/2 & 0 \\ -3\omega/10 & 1-\omega & -\omega/2 \\ -\omega/2 & -\omega/4 & 1-\omega \end{pmatrix}.$$

Lavorando nella norma $\|\cdot\|_\infty$, ci si puó restringere al caso in cui $\omega > 0$; in caso contrario, infatti, gli elementi sulla diagonale di J_T hanno modulo > 1. Poiché

$$|1-\omega| = \begin{cases} 1-\omega & \text{se } \omega \le 1 \\ \omega - 1 & \text{se } \omega > 1, \end{cases}$$

la condizione $\|J_T\|_\infty < 1$ porta ai sistemi di disuguaglianze:

$$\begin{cases} 1-\omega+\omega/2 = 1-\omega/2 < 1 \\ 3\omega/10 + 1 - \omega + \omega/2 = 1 - \omega/5 < 1 \\ \omega/2 + \omega/4 + 1 - \omega = 1 - \omega/4 < 1 \end{cases}$$

(che é sempre soddisfatto) se $0 \le \omega \le 1$, e

$$\begin{cases} \omega - 1 + \omega/2 = -1 - 3\omega/2 < 1 \\ 3\omega/10 + \omega - 1 + \omega/2 = -1 - 9\omega/5 < 1 \\ \omega/2 + \omega/4 + \omega - 1 = -1 - 7\omega/4 < 1 \end{cases}$$

in caso contrario. Da quest'ultimo sistema viene la condizione di convergenza

$$0 \le \omega < 10/9.$$

c) Nel caso di una matrice A generica, la matrice jacobiana della trasformazione é comunque data da $J_T = (1-\omega)I + \omega B_J$, che ha elementi

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1-\omega & \text{se } i = j \\ -\omega \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come si é giá osservato, possiamo restringerci al caso $\omega > 0$. Ora, se $0 < \omega < 1$ la condizione $\|J_T\|_\infty < 1$ si scrive

$$1 - \omega + \omega \max_i \sum_{j \ne i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = 1 + \omega \left[\max_i \sum_{j \ne i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} - 1 \right] < 1$$

ed é soddisfatta se e solo se il termine tra parentesi quadre é negativo, ovvero se la matrice A é a diagonale dominante. Se invece $\omega > 1$, si ha la condizione

$$\omega - 1 + \omega \max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \omega \left[\max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + 1 \right] - 1 < 1$$

che esplicitata rispetto ad ω fornisce

$$\omega < \frac{2}{\max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + 1}, \qquad (**)$$

condizione che é significativa solo se il secondo membro é maggiore di 1 (cioé, di nuovo, se la matrice A é a diagonale dominante). In conclusione, condizioni sufficienti per la convergenza del metodo sono la dominanza diagonale e la limitazione $(**)$ su ω.

Esercizio 2.

b) Scritto il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, la costante di contrazione del metodo su un intervallo $[a, b]$ puó naturalmente essere trovata come massimo su $[a, b]$ di

$$|g'(x)| = \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right|$$

dove

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x}.$$

Il calcolo é peró proibitivo. Un altro possibile approccio é di notare che in $\bar{x}$ si ha $f'(\bar{x}) > 0$, $f''(\bar{x}) < 0$, ed é quindi possibile applicare il teorema di convergenza monotona su un intervallo di tipo $[a, \bar{x}]$ in cui le due derivate conservino lo stesso segno. Per la derivata prima si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{\pi} \right].$$

Per la derivata seconda, posto $t = 1/x$, la condizione $f''(x) < 0$ si traduce nella disuguaglianza

$$2 \cos t < t \sin t$$

che va soddisfatta in un intorno *destro* di π (corrispondente ad un intorno sinistro di $1/\pi$ nella variabile x). Tenendo conto dei segni dei vari termini, si ottiene la disuguaglianza

$$\tan t < \frac{2}{t}$$

che é soddisfatta a maggior ragione se

$$\tan t < \frac{2}{\bar{t}}$$

per una qualche costante $\bar{t} > t$. Utilizzando la condizione $f' > 0$ si puó porre $\bar{t} = 3\pi/2$ da cui finalmente

$$x > \frac{1}{\arctan \frac{4}{3\pi}} \approx 2.49.$$

Esercizio 4.

a) Poiché i due nodi sono simmetrici rispetto al punto centrale dell'intervallo $[a, b]$, i pesi ad essi associati sono uguali e valgono necessariamente

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{b-a}{2}.$$

b) Ponendo $h = (b-a)/4$, e convenzionalmente $a = -2h$, $b = 2h$, si ha

$$\omega_1(x) = x^2 - h^2$$

e di conseguenza, poiché ω_1 ha un estremo locale in $x = 0$,

$$\|\omega_1\|_\infty = \max_{x\in[-2h,2h]} |\omega_1(x)| = \max(|\omega_1(-2h)|, |\omega_1(2h)|, |\omega_1(0)|) = 3h^2.$$

D'altra parte, l'errore di quadratura si puó maggiorare nel modo piú ovvio integrando una maggiorazione dell'errore di interpolazione, ad esempio

$$|I - I_1| \le 4h\frac{\|f''\|_\infty}{2}\|\omega_1\|_\infty = 6h^3\|f''\|_\infty.$$

c) Ponendo $a = 0$, $b = \pi$, nodi e pesi valgono

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

La formula di quadratura fornisce quindi

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} \approx 2.2214.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 06.11.03

Esercizio 1.

a) Esporre il metodo di Newton per sistemi nonlineari, enunciando il risultato di convergenza e discutendo caratteristiche positive e negative delle sue principali varianti (6 punti);

b) esporre il metodo di Newton per la minimizzazione di funzioni, discutendo in particolare come cambiano le proprietá di convergenza rispetto al caso precedente (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle Direzioni Coniugate per forme quadratiche (6 punti);

b) dare una formula per il calcolo delle direzioni coniugate e commentare l'applicazione del metodo a funzioni non quadratiche (3 punti);

c) dimostrare che applicando il metodo del rilassamento ad una forma quadratica definita positiva in due variabili, le direzioni $x^{(1)} - x^{(0)}$ e $x^{(3)} - x^{(1)}$ sono coniugate (6 punti).

Suggerimento: Scrivere esplicitamente le coordinate dei punti $x^{(0)}, \ldots, x^{(3)}$.

Esercizio 3.

a) Calcolare esplicitamente la rotazione che diagonalizza una matrice A simmetrica 2×2 (4 punti);

b) generalizzare al caso dell'azzeramento di una coppia fuori diagonale in una matrice A simmetrica $n \times n$, specificando inoltre quali elementi della matrice vengano modificati nella trasformazione QAQ^t (4 punti);

c) descrivere il metodo di Jacobi per il calcolo di autovalori di matrici simmetriche enunciandone il relativo teorema di convergenza (3 punti).

Esercizio 2.

c) Notiamo intanto che passando da $x^{(0)}$ a $x^{(1)}$ viene aggiornata solo la variabile x_1, e quindi l'esercizio si puó risolvere in modo equivalente dimostrando che $x^{(3)} - x^{(1)}$ é una direzione coniugata ad e_1. Esprimendo esplicitamente i punti $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ come suggerito, e limitandosi alla variabile che di volta in volta viene aggiornata, si ha

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)}\right),$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)}\right) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}} + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}x_2^{(0)},$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(2)}\right) = \cdots = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}} + \frac{a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}^2a_{22}} - \frac{a_{12}^2a_{21}}{a_{11}^2a_{22}}x_2^{(0)}.$$

Le due componenti della direzione $x^{(3)} - x^{(1)}$ sono quindi:

$$x_1^{(3)} - x_1^{(1)} = -\frac{a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}} + \frac{a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}^2a_{22}} - \frac{a_{12}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})}{a_{11}^2a_{22}}x_2^{(0)},$$

$$x_2^{(3)} - x_2^{(1)} = x_2^{(2)} - x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}} + \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}}x_2^{(0)}.$$

Ora, la condizione da verificare é che

$$e_1^t A\left(x^{(3)} - x^{(1)}\right) = 0$$

e quindi che

$$a_{11}\left(x_1^{(3)} - x_1^{(1)}\right) + a_{12}\left(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}\right) = 0$$

e questa condizione puó essere verificata immediatamente per calcolo diretto. Opportune generalizzazioni di questa proprietá di coniugio appena dimostrata sono alla base di metodi di accelerazione della convergenza per schemi di tipo gradiente o rilassamento.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 09.01.04

Esercizio 1.

a) Definire le nozioni di consistenza, stabilitá, stabilitá assoluta, convergenza per uno schema ad un passo per Equazioni Differenziali Ordinarie (5 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per schemi ad un passo espliciti (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di consistenza dei metodi multistep, limitandosi al caso di ordine 2 (6 punti);

Considerato lo schema a due passi

$$u_{k+1} = -\frac{1}{3}u_{k-1} + \frac{4}{3}u_k + \frac{2}{3}hf(x_{k+1}, u_{k+1})$$

b) dimostrare, utilizzando il punto *a*), che ha il secondo ordine di consistenza (2 punti);

c) dimostrare che é assolutamente stabile (5 punti).

Esercizio 3.

a) Dare la definizione di schema (semidiscreto) consistente nella approssimazione di Equazioni a Derivate Parziali evolutive (2 punti).

Intendendo approssimare la derivata seconda tramite la generica formula alle differenze a 5 punti

$$u_{xx}(x_j) \approx a_{-2}u_{j-2} + a_{-1}u_{j-1} + a_0u_j + a_1u_{j+1} + a_2u_{j+2},$$

b) trovare le condizioni sui coefficienti a_i che garantiscono la consistenza della approssimazione (4 punti);

c) calcolare i coefficienti di una formula a cinque punti ottenuta per media aritmetica dei rapporti incrementali secondi in x_{j-1} e x_{j+1} e verificarne la (eventuale) consistenza (3 punti);

d) svolgere i punti *b*) e *c*) per il secondo ordine di consistenza (2+1 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Si tratta di applicare la formula generale dopo aver posto $a_0 = 4/3$, $a_1 = -1/3$, $b_{-1} = 2/3$ (tutte le altre costanti a_j, b_j sono nulle).

c) Come sempre, si pone $y' = -\lambda y$ e si cercano soluzioni nella forma $u_k = \rho^k$ con $|\rho| < 1$. Sostituendo nello schema, si ha

$$\rho^{k+1} = -\frac{1}{3}\rho^{k-1} + \frac{4}{3}\rho^k - \frac{2}{3}h\lambda\rho^{k+1}.$$

Ponendo $h\lambda = t > 0$ e semplificando, si ottiene

$$(3+2t)\rho^2 - 4\rho + 1 = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$\rho = \frac{2 \pm \sqrt{1-2t}}{3+2t}. \qquad (*)$$

Supponiamo inizialmente il discriminante positivo, ovvero $t < 1/2$. Si ha che

$$0 < \sqrt{1-2t} < 1,$$

$$3 < 3+2t < 4.$$

Scegliendo in $(*)$ il segno negativo, si ottiene da queste disuguaglianze

$$\frac{1}{4} < \frac{2-\sqrt{1-2t}}{3+2t} < \frac{2}{3},$$

mentre scegliendo il segno positivo,

$$\frac{1}{2} < \frac{2+\sqrt{1-2t}}{3+2t} < 1,$$

e la condizione $|\rho| < 1$ é soddisfatta in ogni caso. Se $t > 1/2$ le due radici sono complesse ed il modulo va espresso di conseguenza come

$$|\rho| = \frac{4}{(3+2t)^2} + \frac{2t-1}{(3+2t)^2} =$$

$$= \frac{3+2t}{(3+2t)^2} < 1$$

che é chiaramente sempre soddisfatta. Si conclude quindi che, per ogni $t > 0$, $|\rho| < 1$.

Esercizio 3.

b) Si tratta di verificare che, data una funzione regolare $u(x)$, si abbia

$$u_{xx}(x_j) = a_{-2}u(x_j - 2h) + a_{-1}u(x_j - h) + a_0 u(x_j) + a_1 u(x_j + h) + a_2 u(x_j + 2h) + o(1). \tag{$**$}$$

Per dimostrare le condizioni che portano alla consistenza (di fatto si tratta di provare la consistenza *del primo ordine*, poiché il resto $o(1)$ é in realtá $O(h)$) si parte dagli sviluppi di Taylor

$$u(x_j \pm h) = u(x_j) \pm h u_x(x_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_j) + O(h^3)$$

$$u(x_j \pm 2h) = u(x_j) \pm 2h u_x(x_j) + 2h^2 u_{xx}(x_j) + O(h^3).$$

Utilizzando questi sviluppi in $(**)$ e imponendo che il secondo membro coincida con $u_{xx}(x_j)$ a meno di infinitesimi (di primo ordine), si ottengono le condizioni di consistenza

$$\begin{cases} a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_{-2} - a_{-1} + a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2h^2 a_{-2} + \frac{h^2}{2} a_{-1} + \frac{h^2}{2} a_1 + 2h^2 a_2 = 1. \end{cases} \tag{$***$}$$

c) I rapporti incrementali secondi utilizzati sono quello centrato in x_{j-1},

$$\frac{u(x_{j-2}) - 2u(x_{j-1}) + u(x_j)}{h^2},$$

e quello centrato in x_{j+1},

$$\frac{u(x_j) - 2u(x_{j+1}) + u(x_{j+2})}{h^2}.$$

Effettuando la media aritmetica dei due, come richiesto dall'esercizio, si ottiene la approssimazione

$$u_{xx}(x_j) \approx \frac{1}{2h^2} u(x_{j-2}) - \frac{1}{h^2} u(x_{j-1}) + \frac{1}{h^2} u(x_j) - \frac{1}{h^2} u(x_{j+1}) + \frac{1}{2h^2} u(x_{j+2})$$

che é nella forma di una differenza centrata a cinque punti e soddisfa il sistema $(***)$ delle condizioni di consistenza (come é immediato verificare).

d) Osserviamo intanto che il sistema $(***)$ ammette infinite soluzioni, é quindi verosimile che ci sia margine per ottenere un ordine piú alto di consistenza. Utilizzando un termine in piú negli sviluppi ed annullando il termine di derivata terza nella approssimazione (questo permette di ottenere un resto infinitesimo di secondo ordine), si ottiene la ulteriore condizione da aggiungere al sistema $(***)$:

$$-\frac{4}{3} a_{-2} - \frac{1}{6} a_{-1} + \frac{1}{6} a_1 + \frac{4}{3} a_2 = 0.$$

D'altra parte, si verifica facilmente che la formula costruita al punto (*c*) soddisfa anche questa ultima condizione, ed é quindi consistente (almeno) con ordine 2.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 20.01.04

Esercizio 1.

a) Derivare la formula di fattorizzazione di Cholesky per una matrice quadrata definita positiva (5 punti);

b) calcolarne la complessitá computazionale (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica per il metodo di Newton (6 punti);

b) supponendo di cercare il reciproco di un numero reale a come radice dell'equazione

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0,$$

scrivere il metodo di Newton per la sua soluzione (in modo tale da non dover effettuare divisioni) e dare una approssimazione iniziale per cui la successione delle approssimazioni sia sicuramente convergente (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti);

b) scrivere la tabella delle differenze divise di ordine fino al terzo relativa alla funzione $f(x) = 1/x^2$ ed ai nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, lavorando con tre cifre decimali e segnalando eventualmente quali differenze presentino perdita di cifre significative per sottrazione (4 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle formule di Newton–Cotes composite (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) L'equazione, come é scritta, é giá sostanzialmente nella forma giusta per approssimare il reciproco senza ricorrere a divisioni. Infatti si ha:

$$f(x) = \frac{1-ax}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ed il metodo di Newton si scrive nella forma

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k).$$

Poiché la funzione $1/x$ é decrescente e convessa, una approssimazione iniziale nell'intervallo $(0, 1/a)$ porta alla convergenza monotona dello schema.

Esercizio 3.

b) Le differenze divise di $f(x)$, calcolate con tre cifre decimali, sono:

$$f[x_0, x_1] = -0.75$$

$$f[x_1, x_2] = -0.139$$

$$f[x_2, x_3] = -0.048(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 0.306$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = 0.046(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.087(*)$$

dove si é indicata con $(*)$ la perdita di una cifra significativa.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 20.01.04

Esercizio 1.

a) Esporre le principali strategie di scelta delle direzioni e dei passi di ricerca nei metodi di discesa per la minimizzazione di funzioni (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di massima discesa in ricerca esatta (6 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle potenze (6 punti).

Esercizio 3.

a) Dare la forma generica di un metodo di Runge–Kutta esplicito a due stadi, derivando le condizioni per ottenere consistenza del secondo ordine (3 punti);

b) trovare il valore dei parametri del metodo per cui (eventualmente rinunciando al secondo ordine di consistenza) l'intervallo di stabilitá assoluta é piú grande (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di equivalenza di Lax–Richtmeyer (6 punti);

b) Dimostrare consistenza e stabilitá della approssimazione per differenze seconde centrate della equazione del calore (3+3 punti).

Soluzioni

Esercizio 3.

b) Ricordiamo che la condizione di stabilitá assoluta per gli schemi in questione si scrive

$$|1-(a_1+a_2)h\lambda+ba_2h^2\lambda^2|\le 1$$

e che per ottenere la consistenza (di primo ordine) é necessario che $a_1+a_2=1$. Ponendo per semplicitá $h\lambda=t$, $ba_2=\alpha$, si deve quindi studiare la condizione

$$|1-t+\alpha t^2|\le 1,$$

cercando un intervallo del tipo $[0,\bar{t}]$ in cui essa sia soddisfatta, e massimizzando al variare di α il valore $\bar{t}$. Consideriamo prima la disuguaglianza

$$1-t+\alpha t^2\le 1$$

che é soddisfatta per $0\le t\le 1/\alpha=\bar{t}_1$. Considerando poi la seconda disuguaglianza,

$$1-t+\alpha t^2\ge -1,$$

si ha che essa é identicamente soddisfatta per $\alpha\ge 1/8$, ed é soddisfatta nell'intervallo

$$\left[0,\frac{1-\sqrt{1-8\alpha}}{2\alpha}\right]=[0,\bar{t}_2]$$

altrimenti. Ora, osserviamo che $\bar{t}_1$ é decrescente rispetto ad α. Per $\alpha<1/8$, invece, $\bar{t}_2$ é crescente rispetto ad α e si ha $\bar{t}_2<\bar{t}_1$, mentre per $\alpha\ge 1/8$ formalmente puó essere posto $t_2=+\infty$. Si ottiene quindi che $\bar{t}=\min(\bar{t}_1,\bar{t}_2)$ viene massimizzato appunto con la scelta $\alpha=1/8$, ovvero per quanto riguarda i parametri dello schema:

$$a_1+a_2=1,\quad ba_2=\frac{1}{8}.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 16.02.04

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di penalizzazione (6 punti);

b) dato il problema vincolato

$$\min_S (2x_1^2 - x_1 x_2 + 4x_2^2 + 2x_1), \quad S = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2 = 0\}$$

darne una formulazione approssimata per penalizzazione e calcolare il numero di condizionamento della Hessiana di f_ε in funzione del parametro di penalizzazione (5 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre il metodo di Householder per la tridiagonalizzazione di una matrice simmetrica (4 punti);

b) data la matrice quadrata $A = (a_{ij})$, scrivere in funzione dei suoi elementi la *prima* trasformazione $Q^{(1)}$ effettuata dal metodo di Householder (4 punti).

Esercizio 3.

a) Dare la definizione di ordine di consistenza e di stabilitá assoluta degli schemi ad un passo per Equazioni Differenziali Ordinarie (2 punti);

b) dimostrare che lo schema di Crank–Nicolson é assolutamente stabile ed ha il secondo ordine di consistenza (3+3 punti).

Esercizio 4. Esporre il metodo "upwind" di primo ordine per equazioni del trasporto a coefficienti costanti (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.
b) Si puó ad esempio definire

$$f_\varepsilon(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 + \frac{x_2^2}{\varepsilon}.$$

La Hessiana di questa funzione vale

$$H_{f_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 8 + \frac{4}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.
b) Al primo passo, la matrice di Householder ha la struttura

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

dove Q_{n-1} é una riflessione in dimensione $n-1$ il cui vettore di Householder v é dato (supponendo ad esempio $a_{21} > 0$) da

$$v = \begin{pmatrix} a_{21} + \sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

per il quale si ha $\|v\|^2 = 2\left(a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 + a_{21}\sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2}\right)$, e da qui

$$Q_{n-1} = I_{n-1} - 2\frac{vv^t}{\|v\|^2} =$$

$$= I_{n-1} - \frac{1}{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 + a_{21}\sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2}} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \left(a_{21} + \sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2}\right)^2 & \cdots & a_{n1}\left(a_{21} + \sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\left(a_{21} + \sqrt{a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2}\right) & \cdots & a_{n1}^2 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

La trasformazione $Q^{(1)}$ é quindi definita da $(*)$, $(**)$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.04.04

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di fattorizzazione LU senza pivoting (5 punti);

b) calcolarne la complessitá computazionale (3 punti);

c) scrivere esplicitamente in forma di matrice, in funzione degli elementi della matrice $A = (a_{ij})$, la trasformazione di eliminazione della prima variabile dalle righe $2, \dots, n$ di un sistema lineare $Ax = b$ (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i metodi iterativi di Jacobi e Gauss–Seidel per sistemi lineari (5 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (6 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (6 punti).

Supponendo di voler approssimare con il metodo delle corde le radici della equazione

$$\sin x = 0,$$

b) determinare un intervallo (a, b) intorno alla radice $\bar{x} = \pi$ in cui il metodo possa essere applicato (3 punti);

c) calcolare il coefficiente di contrazione del metodo e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore non maggiore di 10^{-4} per ogni $x_0 \in (a, b)$ (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

$c)$ Si tratta di effettuare sulla matrice identitá le stesse operazioni di sostituzione di una riga con la combinazione lineare delle precedenti. Si ha quindi:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

$b, c)$ Si puó ad esempio scegliere $a = 3\pi/4$, $b = 5\pi/4$; il metodo delle corde in questo caso prende la forma $x_{k+1} = g(x_k)$, con

$$g(x) = x - \frac{\frac{\pi}{2}}{-\sqrt{2}} \sin x = x + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin x$$

ed il coefficiente di contrazione del metodo é

$$L = \sup_{[a,b]} |g'(x)| = \sup_{[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]} \left| 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos x \right| =$$

$$= \max \left(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \pi, 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \left(\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215.$$

La precisione richiesta si ottiene quando

$$\frac{\pi}{4} L^k < 10^{-4}$$

(dove $\pi/4$ é la massima distanza dell'approssimazione iniziale dalla soluzione), ovvero alla sesta iterazione. Piú rozzamente, il massimo errore iniziale si sarebbe potuto stimare con $b - a$, ed in questo caso l'errore richiesto sarebbe stato ottenuto entro la settima iterazione.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 03.06.04

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti);

b) calcolare il polinomio di Newton di terzo grado relativo alla funzione $f(x) = 1/x$ ed ai nodi $x_k = 1, 2, 3, 4$, calcolando le differenze divise con quattro decimali ed indicando quelle che presentino perdita di cifre significative per sottrazione (4 punti);

c) ricalcolare la tavola delle differenze ed il polinomio di Newton , sempre con $f(x) = 1/x$ ed $x_k = 0.5, 1, 1.5, 2$ (4 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) calcolare il polinomio di primo grado che approssima per errore quadratico minimo i punti della seguente tabella:

x_i	y_i
-1.5	0.1
-1.0	0.5
-0.5	0.3
0.0	1.0
0.5	1.1
1.0	1.3
1.5	2.1

(5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti).

Considerando in $[-1, 1]$ la formula di quadratura a 3 nodi

$$I_2(f, -1, 1) = \frac{2}{3}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(a),$$

b) trovare il valore di a che rende massimo il grado di precisione e dire qual é questo grado (4 punti);

c) dire (motivando la affermazione) se la formula di quadratura trovata corrisponde alla integrazione del polinomio di Lagrange costruito sui nodi $\{-a, 0, a\}$ (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Le differenze divise di $f(x)$, calcolate con quattro cifre decimali, sono:

$$f[x_0, x_1] = -0.5$$

$$f[x_1, x_2] = -0.1667$$

$$f[x_2, x_3] = -0.0833(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 0.1667$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = 0.0417(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.0417(*)$$

dove si é indicata con $(*)$ la perdita di una cifra significativa. Il polinomio di Newton che si ottiene in questo modo é:

$$\Pi_3(x) = 1 - 0.5(x-1) + 0.1667(x-1)(x-2) - 0.0417(x-1)(x-2)(x-3).$$

c) In questo caso le differenze divise di $f(x)$ sono:

$$f[x_0, x_1] = -2$$

$$f[x_1, x_2] = -0.6666$$

$$f[x_2, x_3] = -0.3334$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 1.3334$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = 0.3332$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.6668$$

e non si é verificata alcuna perdita di cifre significative. Il corrispondente polinomio di Newton é:

$$\Pi_3(x) = 2 - 2(x-0.5) + 1.3334(x-0.5)(x-1) - 0.6668(x-0.5)(x-1)(x-1.5).$$

Esercizio 2.

b) Scritta la retta di errore quadratico minimo nella forma

$$y = ax + b,$$

é noto dalla teoria generale che le due incognite a e b risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i = \sum_i x_i y_i \\ a\sum_i x_i + b\sum_i 1 = \sum_i y_i \end{cases}$$

e poiché nel nostro caso $\sum_i x_i = 0$, il sistema é diagonale ed ha la soluzione $a = 3/5$, $b = 32/35$.

Esercizio 3.

b) La formula é a tre nodi e simmetrica. Poiché non é noto a priori se é stata costruita integrando un polinomio interpolatore, quello che si puó dire é che tutte le potenze dispari di x sono integrate esattamente (cioé danno contributo nullo), e che sono integrate esattamente anche le costanti (infatti la somma dei pesi uguaglia l'ampiezza dell'intervallo di integrazione). Il passo successivo é di determinare a in modo che sia integrata esattamente la funzione x^2 il cui integrale su $[-1, 1]$ vale $2/3$. Calcolando la formula di quadratura su questa funzione, si ottiene la condizione:

$$\frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{3}$$

da cui $a = 1/\sqrt{2}$. Poiché anche la funzione x^3 é integrata esattamente (ma, come si verifica facilmente, non lo é la funzione x^4), il grado di precisione é 3.

c) Integrando ad esempio la funzione di Lagrange relativa al nodo centrale,

$$L_1(x) = 1 - 2x^2$$

si ha:

$$\int_{-1}^{1} L_1(x)dx = 2 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

che conferma (gli altri pesi sono necessariamente uguali a $2/3$) che la formula puó essere anche ottenuta per integrazione del polinomio interpolatore relativo ai tre nodi trovati. Questo fatto discende in realtá da un teorema generale (vedi esame del 13.06.05)

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 09.06.04

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di propagazione della perturbazione δb del termine noto di un sistema lineare (5 punti);

b) Calcolare (nelle norme piú comuni) il numero di condizionamento di una matrice diagonale con autovalori $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza monotona per il metodo di Newton applicato ad equazioni scalari $f(x) = 0$ (6 punti).

b) Adattando opportunamente la dimostrazione del punto precedente, dimostrare che se la funzione f é crescente e convessa in $[\bar{x}, x_0]$, e se $\bar{x} < x_1 < x_0$, la successione x_k generata dal metodo delle secanti converge in modo monotono a $\bar{x}$ (5 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione polinomiale composita, mettendone in evidenza vantaggi e svantaggi (4 punti);

b) Si supponga di interpolare in modo composito la funzione $1/x$ in $[1, 2]$ utilizzando due sottointervalli ed una approssimazione di grado 1 a tratti. Basandosi sulla piú semplice maggiorazione dell'errore, dire come vanno scelte le ampiezze H_1 e H_2 perché l'errore sia maggiorato in modo ottimale (6 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle formule di quadratura di Newton–Cotes (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

con le quadrature del punto centrale, del trapezio e di Simpson (1+1+1 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Come é facile verificare applicando le rispettive definizioni di norme matriciali naturali, data la matrice con autovalori positivi $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si ha

$$\|A\|_1 = \|A\|_2 = \|A\|_\infty = \lambda_1$$

ed anche, come é ovvio,

$$\|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\lambda_n}$$

da cui si ottiene, in ognuna di queste norme,

$$K(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Diversa é la situazione utilizzando la norma di Frobenius, per la quale si ottiene:

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}, \quad \|A^{-1}\|_F = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^2}}$$

e di conseguenza $K_F(A)$ come prodotto di queste due quantitá.

Esercizio 2.

b) Scritto il metodo delle secanti nella forma usuale,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k),$$

i due punti da dimostrare sono che $x_{k+1} < x_k$ e che $x_{k+1} \geq \bar{x}$ (o, che é lo stesso, che $f(x_{k+1}) \geq 0$). Il primo punto si dimostra in modo analogo a quanto fatto per il metodo di Newton una volta notato che, dal teorema di Lagrange,

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi) > 0$$

per $\xi \in [x_k, x_{k-1}]$. Il secondo punto si dimostra ancora allo stesso modo ricordando (questa proprietá é conseguenza della monotonia della derivata prima) che la secante al grafico di una funzione convessa é al di sopra del grafico stesso all'interno dell'intervallo che ha per estremi le due intersezioni, al di sotto del grafico per valori esterni a questo intervallo (in particolare, nel nostro caso, in x_{k+1}). Di conseguenza, nello zero x_{k+1} della secante la funzione sará nonnegativa.

Esercizio 3.

b) Innanzi tutto, la condizione che rende ottimale l'approssimazione é che l'errore in norma uniforme sia minimo. Sui due intervalli si ha

$$\max_{[1,1+H_1]} |f(x) - \Pi_{1,H}(x)| \le C \max_{[1,1+H_1]} |f''(x)| H_1^2$$

$$\max_{[1+H_1,2]} |f(x) - \Pi_{1,H}(x)| \le C \max_{[1+H_1,2]} |f''(x)| H_2^2 = \max_{[1+H_1,2]} |f''(x)|(1-H_1)^2.$$

D'altra parte, $f''(x) = 2/x^3$ e quindi

$$\max_{[1,1+H_1]} |f''(x)| = 2,$$

$$\max_{[1+H_1,2]} |f''(x)| = \frac{2}{(1+H_1)^3}$$

da cui si puó ottenere la maggiorazione

$$\|f - \Pi_{1,H}\| \le 2C \max\left(H_1^2, \frac{(1-H_1)^2}{(1+H_1)^3}\right). \qquad (*)$$

Ora, rispetto ad H_1, la funzione H_1^2 é positiva e crescente in $[1,2]$, mentre la funzione $(1-H_1)^2/(1+H_1)^3$ é positiva e decrescente (numeratore positivo e decrescente, denominatore positivo e crescente). Di conseguenza il valore minimo del secondo membro di $(*)$ si ottiene quando le due quantitá sono uguali, ovvero quando

$$H_1^2 = \frac{(1-H_1)^2}{(1+H_1)^3}.$$

L'equazione non é risolvibile esplicitamente, ma ha una sola soluzione reale per $H_1 \approx 0.381$.

Esercizio 4.

b) Si ha, rispettivamente, $I_0 = \sqrt{2}/2$, $I_1 = 1/2$, $I_2 = \sqrt{2}/3 + 1/6 \approx 0.638$ contro un valore esatto di $2/3$. In questo caso non ci si aspetta che formule di ordine piú alto forniscano risultati piú accurati. La funzione, infatti, non ha derivate limitate in $[0,1]$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 12.07.04

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo iterativo di Jacobi (5 punti);

b) calcolare, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la costante di contrazione del metodo per un sistema lineare con matrice data da

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2 & 1 \\ -\alpha & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

nelle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ (3+3 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre e confrontare i principali metodi di soluzione di equazioni scalari nonlineari (4 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) suppponendo di interpolare una funzione con ordine $n = 3, 5, 7$ in $[-1, 1]$, determinare il valore massimo della quantitá $|\omega_n|$ nel sottointervallo compreso tra i due nodi centrali (4 punti);

c) generalizzare ad un ordine n dispari qualsiasi (3 punti).

Esercizio 4. Esporre i principi generali di costruzione ed uso delle formule di quadratura di Newton–Cotes (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice di iterazione dello schema é data da:

$$J_T = \begin{pmatrix} 0 & -1/\alpha & -1/(2\alpha) \\ \alpha/5 & 0 & -2/5 \\ -1/\alpha & -1/\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella norma $\|\cdot\|_\infty$ si ha:

$$\|J_T\|_\infty = \max\left(\frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{2|\alpha|}; \frac{|\alpha|}{5} + \frac{2}{5}; \frac{2}{|\alpha|}\right) = \cdots = \max\left(\frac{|\alpha|+2}{5}; \frac{2}{|\alpha|}\right).$$

Ragionando nella variabile $|\alpha|$ la condizione di contrattivitá $\|\cdot\|_\infty < 1$ si ottiene per $2 < |\alpha| < 3$, e piú precisamente in funzione di α:

$$\|J_T\|_\infty = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|} & \text{se } 2 < |\alpha| \le \sqrt{11} - 1 \\ \frac{|\alpha|+2}{5} & \text{se } \sqrt{11} - 1 \le |\alpha| < 3. \end{cases}$$

Nella norma $\|\cdot\|_1$ si ha:

$$\|J_T\|_1 = \max\left(\frac{|\alpha|}{5} + \frac{1}{|\alpha|}; \frac{2}{|\alpha|}; \frac{1}{2|\alpha|} + \frac{2}{5}\right) = \cdots = \max\left(\frac{|\alpha|^2+5}{5|\alpha|}; \frac{2}{|\alpha|}\right).$$

La condizione di contrattivitá $\|\cdot\|_1 < 1$ in questo caso si ottiene per $2 < |\alpha| < (5+\sqrt{5})/2$, ed in funzione di α:

$$\|J_T\|_1 = \begin{cases} \frac{2}{|\alpha|} & \text{se } 2 < |\alpha| \le \sqrt{5} \\ \frac{|\alpha|^2+5}{5|\alpha|} & \text{se } \sqrt{5} \le |\alpha| < (5+\sqrt{5})/2. \end{cases}$$

Esercizio 3.

b, c) L'esercizio suppone implicitamente che i nodi siano spaziati uniformemente in $[-1, 1]$, con $x_0 = -1$, $x_n = 1$. In questa situazione si ha $h = 2/n$ ed il polinomio ω_n, raccogliendo i termini relativi a nodi simmetrici, ha la forma:

$$\omega_n(x) = \left(x^2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(x^2 - \frac{9}{n^2}\right)\left(x^2 - \frac{25}{n^2}\right)\cdots\left(x^2 - \frac{(n-2)^2}{n^2}\right)\left(x^2 - 1\right).$$

Poiché si tratta di una funzione pari che ha un solo estremo tra ogni coppia di radici contigue, l'estremo relativo all'intervallo centrale si avrá per $x = 0$, ed in corrispondenza:

$$|\omega_n(0)| = \prod_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(2j-1)^2}{n^2}.$$

In particolare, per $n = 3, 5, 7$ si ottiene:

$$|\omega_3(0)| = \prod_{j=1}^{2} \frac{(2j-1)^2}{9} = \frac{1}{9} \approx 0.1111,$$

$$|\omega_5(0)| = \prod_{j=1}^{3} \frac{(2j-1)^2}{25} = \frac{1}{25} \cdot \frac{9}{25} \approx 0.0144,$$

$$|\omega_7(0)| = \prod_{j=1}^{4} \frac{(2j-1)^2}{49} = \frac{1}{49} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{25}{49} \approx 0.0019.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.09.04

Esercizio 1. Esporre il Metodo di Eliminazione di Gauss (5 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre il metodo di Newton per equazioni scalari e le sue varianti principali (5 punti);

b) Supponendo di sostituire nel metodo di Newton il valore $f'(x_k)$ con il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h},$$

dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\bar{x}|}{|x_k-\bar{x}|} = O(h)$$

(con $\bar{x}$ radice dell'equazione $f(x)=0$) (6 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio di Lagrange (5 punti);

b) Interpolando la funzione $\sin x$ con grado 2, approssimare $\sin 1$ basandosi sui valori $\sin \frac{k\pi}{4}$, scegliendo i nodi che portano all'errore minimo (e motivando la scelta) (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di positivitá per i pesi delle formule di Gauss–Legendre (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Ricordiamo che per un metodo iterativo del tipo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

il limite richiesto equivale a calcolare $|g'(\bar{x})|$. La funzione g ha in questo caso la forma

$$g(x) = x - \frac{hf(x)}{f(x+h) - f(x)}$$

da cui

$$g'(x) = 1 - \frac{h}{[f(x+h) - f(x)]^2}[f'(x+h) - f'(x)]f(x) - \frac{hf'(x)}{f(x+h) - f(x)}.$$

Tenendo conto del fatto che $f(\bar{x}) = 0$, si ottiene, per un qualche $\xi \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$

$$g'(\bar{x}) = 1 - \frac{hf'(\bar{x})}{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})} = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(\xi)} = \frac{f'(\xi) - f'(\bar{x})}{f'(\xi)}$$

in cui si riconosce che l'ultimo membro di questa uguaglianza é effettivamente $O(h)$: infatti $|\xi - \bar{x}| \le h$ e quindi il numeratore é $O(h)$ se f ha derivata seconda limitata; il numeratore $f'(\xi)$ é poi non nullo se $\bar{x}$ si suppone (come di consueto) essere una radice semplice e h é sufficientemente piccolo (in modo che $|f'(x)| \ge c > 0$ in $[\bar{x}, \bar{x}+h]$).

Esercizio 3.

b) Escludendo a priori il caso in cui il punto $x = 1$ cada al di fuori dell'intervallo $[x_0, x_2]$, le due scelte possibili sono da un lato $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$ e dall'altro $x_0 = \pi/4$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = 3\pi/4$. Dato che $f'''(x) = -\cos x$, nel primo caso si ottiene

$$\sup_{[x_0,x_2]} |f'''(x)| = 1,$$

$$|\omega_2(1)| = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \approx 0.1225,$$

mentre nel secondo caso

$$\sup_{[x_0,x_2]} |f'''(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071,$$

$$|\omega_2(1)| = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{3\pi}{4}\right) \approx 0.1661.$$

La maggiorazione ottimale di errore si ha quindi nel secondo caso, e vale

$$|f(1) - \Pi_2(1)| \leq \frac{1}{3!} \sup_{[x_0,x_2]} |f'''(x)| \cdot |\omega_2(1)| \approx 0.0196.$$

Calcolando infine il polinomio interpolatore nella forma di Lagrange, si ha

$$\Pi_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} L_0(1) + L_1(1) + \frac{\sqrt{2}}{2} L_2(1) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}} \approx 0.8453.$$

Per confronto, il valore corretto é $\sin 1 = 0.841471\ldots$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 04.11.04

Esercizio 1. Dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} x_1^3 + 3x_2^2 - 4 = 0 \\ 8x_1 - x_2^4 - 7 = 0 \end{cases}$$

a) scrivere lo schema di Newton per la sua soluzione iterativa, senza inversioni esplicite di matrici (2 punti);
b) scriverlo in una forma di punto fisso (diversa da quella del punto precedente), possibilmente in modo che il secondo membro sia una contrazione in un intorno della soluzione $(1, 1)$ (2+2 punti);
c) riformularlo come problema di minimizzazione, specificando una opportuna funzione residuo (3 punti).

Esercizio 2.
a) Dare una panoramica dei principali metodi di discesa per la minimizzazione libera di funzioni (4 punti);
b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo della discesa piú ripida nella sua formulazione piú generale (6 punti);
c) applicare il teorema precedente per dimostrare la convergenza del metodo di Newton(4 punti).

Esercizio 3.
a) Descrivere il metodo del gradiente proiettato per la soluzione di problemi di minimizzazione vincolata, dando anche il relativo risultato di convergenza (4 punti);
b) scrivere esplicitamente un algoritmo per trovare la proiezione di un punto su un n–intervallo del tipo $a_i \leq x_i \leq b_i$, $(i = 1, \dots, n)$ (4 punti);

Soluzioni

Esercizio 1.

a) La matrice Jacobiana del sistema é:

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 6x_2 \\ 8 & -4x_2^3 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza il metodo di Newton, nella forma di sistema lineare $J_F(x^{(k)})x^{(k+1)} = -F(x^{(k)})$, si scrive esplicitamente come

$$\begin{pmatrix} 3{x_1^{(k)}}^2 & 6x_2^{(k)} \\ 8 & -4{x_2^{(k)}}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} {x_1^{(k)}}^3 + 3{x_2^{(k)}}^2 - 4 \\ 8x_1^{(k)} - {x_2^{(k)}}^4 - 7 \end{pmatrix}.$$

b) Si puó notare che nell'intorno della soluzione la matrice Jacobiana diviene dominante diagonale scambiando le righe: questo indica che puó essere conveniente esplicitare x_1 dalla seconda equazione ed x_2 dalla prima. Effettuando questa operazione si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2^4+7}{8} \\ x_2 = \sqrt{\frac{4-x_1^3}{3}} \end{cases}$$

che é appunto un sistema di punto fisso nella forma $x = T(x)$. Per dimostrare che esiste un intorno della soluzione in cui la funzione T é una contrazione, ne calcoliamo intanto la matrice Jacobiana, che é data da

$$J_T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_2^3}{2} \\ -\frac{x_1^2}{2\sqrt{\frac{4-x_1^3}{3}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nella soluzione si ha

$$J_T(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\|J_T(1,1)\| = 1/2$ in tutte le norme naturali usuali. Ne segue che esiste un intorno U della soluzione tale che $L_T = \sup_U \|J_T(x)\| < 1$.

c) Il modo piú ovvio é di utilizzare il residuo quadratico, minimizzando quindi la funzione

$$f(x) = (x_1^3 + 3x_2^2 - 4)^2 + (8x_1 - x_2^4 - 7)^2.$$

Esercizio 3.

b) Si ha $P_I(x) = \bar{x}$, con le componenti del punto $\bar{x}$ date da

$$\bar{x}_i = P_{[a_i,b_i]}(x_i) = \begin{cases} a_i & \text{se } x_i < a_i \\ b_i & \text{se } x_i > b_i \\ x_i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.01.05

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo espliciti (6 punti);

b) dimostrare che in un metodo di Runge–Kutta generico, la funzione Φ é lipschitziana se lo é f (eventualmente supporre per semplicitá che f sia anche limitata) (5 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione della regione di stabilitá assoluta dei metodi multistep lineari (5 punti);

b) supponendo che nel problema modello usato per la verifica della stabilitá assoluta,

$$y' = \lambda y,$$

si utilizzi un valore complesso di λ, caratterizzare la regione di stabilitá assoluta del metodo di Eulero esplicito *nel piano complesso* (5 punti).

Esercizio 3.

a) Dare la definizione di consistenza e di stabilitá per schemi semidiscreti per Equazioni a Derivate Parziali ed enunciare il Teorema di Lax–Richtmeyer (2+2 punti);

b) descrivere il metodo alle differenze centrate per la approssimazione dell'equazione del calore, verificandone consistenza e stabilitá (3+3+3 punti);

c) calcolare il dominio di dipendenza numerico e discutere la condizione CFL per la stabilitá dello schema completamente discreto (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Per semplicitá consideriamo solo la dipendenza delle funzioni f e Φ dalla variabile y. La forma generale di un metodo di RK esplicito a q stadi é:

$$\begin{cases} \Phi(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} a_i F_i(y) \\ F_i(y) = f\left(y + b_i h \displaystyle\sum_{j<i} c_{ij} F_j(y)\right) \end{cases} \tag{$*$}$$

e la condizione di lipschitzianitá di Φ si scrive

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq L_\Phi \|u - v\|.$$

Ora, indicata con L_0 la costante di Lipschitz di f e con L_i quella della funzione F_i per $i > 0$, dalla $(*)$ si ha immediatamente che

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \sum_{i=1}^{q} |a_i| \|F_i(u) - F_i(v)\| \leq \left[\sum_{i=1}^{q} |a_i| L_i\right] \|u - v\|$$

che porta naturalmente ad individuare L_Φ con il termine tra parentesi quadre. D'altra parte, per dimostrare la lipschitzianitá delle funzioni F_i dalla loro definizione, operando nello stesso modo ed utilizzando la disuguaglianza triangolare, si ha

$$\begin{aligned} \|F_i(u) - F_i(v)\| &\leq \left\| f\left(u + b_i h \sum_{j<i} c_{ij} F_j(u)\right) - f\left(v + b_i h \sum_{j<i} c_{ij} F_j(v)\right)\right\| \leq \\ &\leq L_0 \left\| \left(u + b_i h \sum_{j<i} c_{ij} F_j(u)\right) - \left(v + b_i h \sum_{j<i} c_{ij} F_j(v)\right)\right\| \leq \\ &\leq L_0 \left[\|u - v\| + |b_i| h \sum_{j<i} |c_{ij}| L_j \|u - v\|\right] \leq \\ &\leq L_0 \left[1 + |b_i| h \sum_{j<i} |c_{ij}| L_j\right] \|u - v\|, \end{aligned}$$

da cui si ottiene che la funzione F_i é lipschitziana se lo sono tutte le funzioni F_j con $j < i$. Ma per induzione, essendo data L_0, si ottiene la lipschitzianitá di tutte le F_i, e di conseguenza della Φ. Questo calcolo generalizza quello fatto per i metodi di RK del secondo ordine nell'esercizio 2.b del 09.01.03.

Esercizio 2.

b) Osserviamo intanto che questo tipo di analisi permette di caratterizzare il comportamento di uno schema (se applicato ad un sistema differenziale lineare o linearizzato) in presenza di soluzioni non solo esponenziali, ma anche di tipo oscillatorio, che corrispondono a coppie di autovalori complessi coniugati. Procedendo come al solito, si ottiene $u_{k+1} = (1 + h\lambda)u_k$. Posto ora $h\lambda = z \in \mathbf{C}$, la condizione di stabilitá assoluta,

$$|1 + z| < 1$$

individua sul piano complesso un disco di raggio unitario centrato nel punto $(-1, 0)$. La condizione che porta alla stabilitá assoluta dello schema, é che il valore di h sia sufficientemente piccolo da portare il punto z all'interno del disco (questo é sempre possibile, come é facile verificare, se λ ha parte reale negativa). Vale la pena di osservare che la condizione ottenuta su h *non equivale* ad utilizzare la parte reale di λ nella disuguaglianza consueta, $h < 2/|\lambda|$ (ottenuta per λ reale).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 24.01.05

Esercizio 1. Dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = (a_{ij})$,

a) scrivere in forma di matrice T_i la trasformazione che elimina una variabile generica x_i dalle righe successive (5 punti);

b) calcolare il prodotto di due trasformazioni di questo tipo T_i e T_j con $i \neq j$ (3 punti);

c) dimostrare che l'inversa della matrice T_i si ottiene cambiando il segno degli elementi fuori diagonale nella matrice stessa (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica per il metodo di Newton applicato ad equazioni scalari $f(x) = 0$ (6 punti).

b) Dimostrare che, in un metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ con $g(x) = x+\alpha f(x)^2$ ed $f \in C^1$, non esiste un valore di α per cui si possa avere convergenza quadratica (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di costruzione del polinomio di Newton (5 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di unicitá del polinomio interpolatore (4 punti).

Esercizio 4. Approssimare l'integrale

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx$$

con le quadrature di Gauss–Legendre a tre, quattro e cinque nodi (2+2+2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Procedendo come nell'esercizio 1 del 15.04.04, e ricordando che la matrice su cui si sta operando non é A bensí $A^{(i)}$, si ha

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\frac{a^{(i)}_{i+1,i}}{a^{(i)}_{ii}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{a^{(i)}_{ni}}{a^{(i)}_{ii}} & & 1 \end{pmatrix}$$

in cui si sono indicati solo gli elementi non nulli, e la colonna modificata della matrice identitá é la i–sima.

b) Supponiamo $j > i$ e consideriamo il prodotto $T = T_j T_i$ con lo stesso ordine con cui viene effettuata l'eliminazione delle variabili. La struttura delle matrici implica che gli unici elementi non nulli del prodotto, oltre agli elementi unitari sulla diagonale, sono gli elementi del triangolo inferiore, sulle colonne i e j. Poiché le prime j righe della matrice T_j corrispondono a quelle della matrice identitá, le prime j righe di T corrispondono a quelle della matrice T_i. Sulla generica riga k–esima di T_j, con $k > j$, gli elementi non nulli sono quelli nelle colonne j e k, mentre sulla l–esima colonna di T_i gli elementi non nulli sono l'elemento l–esimo e, se $l = i$, tutti i successivi. Per $k > j$ si ha quindi

$$t_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq i, j, k \\ \frac{a^{(j)}_{kj}}{a^{(j)}_{jj}} \frac{a^{(i)}_{ji}}{a^{(i)}_{ii}} - \frac{a^{(i)}_{ki}}{a^{(i)}_{ii}} & \text{se } l = i \\ -\frac{a^{(j)}_{kj}}{a^{(j)}_{jj}} & \text{se } l = j \\ 1 & \text{se } l = k. \end{cases}$$

c) Indicata con C la matrice prodotto, si tratta di verificare che

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\frac{a^{(i)}_{i+1,i}}{a^{(i)}_{ii}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -\frac{a^{(i)}_{ni}}{a^{(i)}_{ii}} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \frac{a^{(i)}_{i+1,i}}{a^{(i)}_{ii}} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \frac{a^{(i)}_{ni}}{a^{(i)}_{ii}} & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ora, é del tutto ovvio che le prime i righe della matrice C coincidano con quelle della matrice identica. Per la generica riga k–sima, con $k > i$, gli elementi non nulli nei due fattori sono quelli nelle colonne i e k. Si ha quindi

$$c_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq i, k \\ -\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} + \frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} = 0 & \text{se } l = i \\ 1 & \text{se } l = k. \end{cases}$$

Esercizio 2.

b) Perché il metodo abbia convergenza quadratica, occorre che $g'(\bar{x}) = 0$. Per il metodo in questione si ha

$$g'(x) = 1 + 2\alpha f(x) f'(x)$$

e poiché il valore $f'(\bar{x})$ é finito ed $f(\bar{x}) = 0$, necessariamente $g'(\bar{x}) = 1$ per ogni valore di α.

Esercizio 4. Prima di applicare le formule proposte, occorre riportare i nodi ed i pesi delle formule dall'intervallo di riferimento $[-1, 1]$ all'intervallo $[0, 4]$. Indicando con x_i, α_i i nodi ed i pesi relativi a questo intervallo e con t_i e w_i le rispettive quantitá per l'intervallo di riferimento, si ha

$$x_i = 2(t_i + 1), \quad \alpha_i = 2w_i.$$

Lavorando con sei cifre decimali, si ottiene a conti fatti

$$I_2 \approx 5.724083, \quad I_3 \approx 5.342621, \quad I_4 \approx 5.338379.$$

Il valore esatto dell'integrale é $16/3 = 5.\bar{3}$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 24.01.05

Esercizio 1.

a) Descrivere i metodi di direzioni coniugate e le loro caratteristiche nella minimizzazione di funzioni quadratiche e non (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza per funzioni quadratiche (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di penalizzazione (6 punti).

b) Dare una versione penalizzata del problema di minimizzazione vincolata $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = 3x_1^2 - x_1x_2 + 10x_2^2,$$

$$S = \{x \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$$

(4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare la nozione di consistenza per schemi ad un passo (2 punti);

b) verificare la consistenza degli schemi di Heun e Crank–Nicolson (4+4 punti).

Esercizio 4. Descrivere il metodo "upwind" per l'equazione del trasporto nelle versioni semidiscreta e completamente discreta (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Tenendo conto che conviene lavorare con la norma al quadrato, e che il vincolo ha simmetria radiale, una possibile definizione della funzione di penalizzazione é

$$H(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{+2} + (x_1^2 + x_2^2 - 4)^{+2}$$

da cui si ottiene la funzione penalizzata

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 + 10x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left[(1 - x_1^2 - x_2^2)^{+2} + (x_1^2 + x_2^2 - 4)^{+2}\right].$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.02.05

Esercizio 1.

a) Descrivere le varie strategie di ricerca unidimensionale utilizzate nei metodi di discesa (4 punti);

b) dimostrare che il metodo del gradiente con passo fisso applicato a funzioni quadratiche definite positive é convergente, indicando anche una maggiorazione esplicita per il passo β (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo del rilassamento proiettato ed enunciarne il teorema di convergenza (4 punti);

b) scrivere il metodo del rilassamento proiettato per la funzione

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 4$$

con il vincolo

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}$$

(3 punti).

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ ed il metodo ad un passo

$$u_{k+1} = u_k + h \left[f(x_k, u_k) + \frac{h}{2} \big(f_x(x_k, u_k) + f_y(x_k, u_k) f(x_k, u_k) \big) \right]$$

a) dimostrare che il metodo é consistente con ordine due (3 punti);

c) dimostrare che é zero–stabile (4 punti).

c) trovarne l'intervallo di stabilitá assoluta (4 punti).

Esercizio 4.

a) Esporre la approssimazione per differenze seconde centrate della equazione di Poisson (4 punti);

b) riformulare le nozioni di consistenza e stabilitá per equazioni lineari stazionarie (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Il metodo del gradiente a passo fisso si scrive, nel caso specifico di una funzione $f(x) = 1/2\,(Ax, x) - (b, x)$, nella forma

$$x_{k+1} = x_k - \beta(Ax_k - b).$$

Le condizioni di convergenza sono calcolate nella correzione del successivo esonero del 11.04.05, in cui questo metodo viene riletto come metodo iterativo per sistemi lineari.

Esercizio 2.

b) Le derivate parziali di f sono

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 6x_1 + x_2$$
$$f_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + x_1$$

ed il metodo del rilassamento proiettato ha quindi la forma

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = P_{[1,2]}\Big(-\frac{1}{2}x_1^{(k+1)}\Big) \end{cases}$$

Esercizio 3.

a) Si vede immediatamente che $\bar{y}+h\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ é esattamente lo sviluppo di Taylor di secondo ordine della soluzione nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

b) Piuttosto che verificare direttamente la zero–stabilitá, conviene verificare la lipschitzianitá della funzione Φ che implica la stabilitá (vedi esame del 09.01.03). Supponendo f sufficientemente regolare, e limitandosi alla dipendenza da y, si ha

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| = \left\| f(u) + \frac{h}{2}\big(f_y(u)f(u)\big) - f(v) - \frac{h}{2}\big(f_y(v)f(v)\big)\right\| \le$$
$$\le \|f(u) - f(v)\| + \frac{h}{2}\|f_y(u)f(u) - f_y(v)f(v)\| =$$
$$= \|f(u) - f(v)\| + \frac{h}{2}\|f_y(u)f(u) - f_y(u)f(v) + f_y(u)f(v) - f_y(v)f(v)\| \le$$
$$\le \|f(u) - f(v)\| + \frac{h}{2}\|f_y(u)(f(u) - f(v))\| + \frac{h}{2}\|(f_y(u) - f_y(v))f(v)\| \le$$
$$\le L_0\|u - v\| + \frac{h}{2}L_0^2\|u - v\| + \frac{h}{2}M_0L_1\|u - v\| =$$
$$= \Big(L_0 + \frac{h}{2}(L_0^2 + M_0L_1)\Big)\|u - v\|$$

dove si sono indicate rispettivamente con L_0 ed L_1 le costanti di Lipschitz di f ed f_y, e con M_0 la massima norma di f (supposta qui limitata per semplicitá).

c) Trattandosi di un metodo che utilizza lo sviluppo di Taylor della soluzione in (x_k, u_k), la disuguaglianza che definisce la regione di stabilitá assoluta é la stessa che si ottiene nel caso dei metodi di Runge–Kutta del secondo ordine (vedi esame del 12.06.00), e la condizione di stabilitá assoluta é ancora $h < 2/\lambda$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 11.04.05

Esercizio 1. Esporre il metodo di soluzione di sistemi lineari per fattorizzazione LU, indicando anche un algoritmo di fattorizzazione non pivotata (6 punti).

Esercizio 2. Considerato il seguente metodo iterativo per la soluzione di sistemi lineari:

$$x_{k+1} = x_k - \beta(Ax_k - b)$$

con $\beta \in \mathbf{R}$ parametro fissato,

a) dare una condizione generale di convergenza nella ipotesi che A abbia autovalori positivi $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ (4 punti);

b) fornire un intervallo accettabile (anche se eventualmente non ottimale) per β nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3 punti);

c) dire se in questo caso il metodo di Jacobi convergerebbe, ed eventualmente con quale coefficiente di contrazione in norma $\| \cdot \|_\infty$ (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza quadratica per il metodo di Newton (6 punti).

Considerando il metodo ottenuto sostituendo alla derivata di f il rapporto incrementale,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h}{f(x_k + h) - f(x_k)} f(x_k),$$

e supponendo che il calcolo di f sia effettuato a meno di un errore δ,

b) discutere qualitativamente i criteri di scelta di h ed in particolare il motivo per cui non puó essere troppo piccolo (2 punti);

c) trovare il valore di h che rende massima l'efficienza dello schema per una funzione f tale che $0 < m_1 < f'(x) < M_1$, $|f''(x)| < M_2$ (6 punti);

d) dimostrare che, se f é convessa e crescente ed $x_0 > \bar{x}$, allora la successione x_k é decrescente e limitata dal basso da $\bar{x}$ (3+4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Lo schema si puó riscrivere nella forma

$$x_{k+1} = (I - \beta A)x_k + \beta b.$$

La matrice di iterazione (jacobiana) del metodo é $J_T = I - \beta A$ che ha autovalori $1 - \beta\lambda_1, \dots, 1 - \beta\lambda_n$. La condizione di convergenza $\rho(J_T) < 1$ equivale a

$$\begin{cases} |1 - \beta\lambda_1| < 1 \\ \quad\vdots \\ |1 - \beta\lambda_n| < 1. \end{cases}$$

Possiamo scartare dall'inizio il caso $\beta > 0$, che non permette di soddisfare alcuna di queste disequazioni. Poiché allora $\beta > 0$, le disuguaglianze $1 - \beta\lambda_i < 1$ sono sempre soddisfatte e ci si riduce quindi alle condizioni $1 - \beta\lambda_i > -1$. Prendendo la piú restrittiva si ha infine

$$\beta < \frac{2}{\lambda_n}.$$

b) In questo caso particolare si ha

$$J_T = \begin{pmatrix} 1-2\beta & -\beta & 0 \\ -\beta & 1-3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 1-2\beta \end{pmatrix}$$

Piuttosto che applicare il criterio generale $\rho(J_T) < 1$ si puó applicare la condizione sufficiente $\|J_T\| < 1$ che é piú facilmente risolvibile. Lavorando ad esempio nella norma $\|\cdot\|_\infty$, si ha

$$\|J_T\|_\infty = \max\big(2\beta + |1-3\beta|, \beta + |1-2\beta|\big) < 1.$$

Dalla disequazione $\beta + |1 - 2\beta| < 1$si ottiene la condizione $0 < \beta < 2/3$, mentre dall'altra disequazione $2\beta + |1 - 3\beta| < 1$ si ottiene

$$0 < \beta < \frac{2}{5}$$

che include anche la condizione precedente.

c) Per il metodo di Jacobi la matrice di iterazione é

$$J_T = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la costante di contrazione richiesta vale $\|J_T\|_\infty = 2/3$.

Esercizio 3.

$b, c)$ Come é evidente, valori troppo piccoli di h portano a perdita di cifre significative per sottrazione nel calcolo del rapporto incrementale; in questo modo il rapporto si allontana di nuovo dal valore teoricamente ottimale per la convergenza del metodo. Una analisi completa richiederebbe di calcolare (e minimizzare rispetto ad h) la funzione $|g'(x)|$, ma il calcolo é troppo complesso. Un analisi semplificata consiste nell'imporre che il rapporto incrementale perturbato,

$$\frac{f(x+h) + \delta_1 - f(x) - \delta_2}{h},$$

sia il piú possibile vicino ad $f'(x)$. Poiché si ha

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

allora

$$\left| \frac{f(x+h) + \delta_1 - f(x) - \delta_2}{h} - f'(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{hf'(x) + h^2/2\, f''(x) + \delta_1 - \delta_2 - hf'(x)}{h} \right| \leq$$

$$\leq |h| \frac{M_2}{2} + \frac{2\delta}{|h|}$$

(si puó osservare che il primo termine maggiora l'errore di troncamento, il secondo l'effetto di propagazione delle perturbazioni δ_1 e δ_2). Per minimizzare si annulla la derivata rispetto a $|h|$, ottenendo infine la soluzione

$$|h| = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}.$$

$d)$ La dimostrazione é analoga a quella vista nel caso del metodo delle secanti (esercizio 2 del 9.06.04), con l'unica accortezza che nella situazione ipotizzata h deve essere positivo: in caso contrario, infatti (come si puó vedere facilmente), quando $x_k + h < \bar{x} < x_k$, allora $x_{k+1} < \bar{x}$. Ovviamente, nella situazione simmetrica (cioé quando la successione x_k é crescente), si deve avere $h < 0$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 30.05.05

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti);
b) dare una formula di tipo Horner per il suo calcolo (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di interpolazione composita e dimostrare la relativa maggiorazione di errore (4 punti);
b) descrivere la strategia di quadratura composita e dimostrare la relativa maggiorazione di errore (4 punti);
c) approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

con una quadratura dei trapezi composita su 2,4,8 sottointervalli (1+2+3 punti);
d) calcolare l'ordine di convergenza in corrispondenza dei due infittimenti (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule Gaussiane (6 punti).
b) supponendo di conoscere *i soli nodi* delle formule di Gauss–Legendre, calcolare i pesi delle formule fino al grado $n = 3$ utilizzando le stesse formule di quadratura giá trovate (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) Con sei cifre decimali, si ha $I_{1,2} = 0.603554$, $I_{1,4} = 0.643283$ e $I_{1,8} = 0.658130$.

d) Indicando con ϵ_m l'errore sulla quadratura $I_{1,m}$, e ricordato che il valore esatto dell'integrale é 2/3, si ha $\epsilon_2 \approx 0.063313$, $\epsilon_4 \approx 0.023384$ e $\epsilon_2 \approx 0.008537$. Supponendo che l'errore si comporti come Ch^α, l'ordine di convergenza viene stimato eliminando la costante C dalla coppia di errori ϵ_m e ϵ_{2m} ed ottenendo quindi

$$\alpha \approx \log_2 \frac{\epsilon_m}{\epsilon_{2m}} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{\epsilon_m}{\epsilon_{2m}}.$$

Il risultato é $\alpha \approx 1.432415$ per $m = 2$ e $\alpha \approx 1.453721$ per $m = 4$. Si puó notare che l'ordine di convergenza *non é quadratico* come la teoria affermerebbe: ció accade perché la derivata seconda non resta limitata.

Esercizio 3.

b) La tabella dei nodi riferiti all'intervallo $[-1, 1]$, fino al grado $n = 3$ e con sei cifre decimali, é:

n	t_i
0	0.0
1	±0.577350
2	0.0 ±0.774597
3	±0.339981 ±0.861136

Il calcolo dei pesi w_i richiede naturalmente di integrare le funzioni $L_i(t)$ della base di Lagrange. Per avere un grado di precisione sufficiente con le formule gaussiane, basta valutare gli integrali delle L_i mediante la formula di grado 0 per i pesi della formula di grado 1 (infatti la formula del punto medio ha grado di precisione 1) e mediante la formula di grado 1 (che é stata calcolata in precedenza, ed ha grado di precisione 3) per i pesi delle formule di grado 2 e 3. La costruzione della formula di grado 0 non ha bisogno di operazioni di quadratura. Per la formula di grado 1 si ha:

$$L_0(t) = \frac{(t - 0.577350)}{-1.1547}, \quad L_1(t) = \frac{(t + 0.577350)}{1.1547},$$

ed applicando la formula del punto centrale si ottengono i pesi

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_0(t)dt = 2L_0(0) = 2\frac{(0-0.577350)}{-1.1547} = 1,$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)dt = 2L_1(0) = 2\frac{(0+0.577350)}{1.1547} = 1 = 2 - w_0.$$

Allo stesso modo, per la formula di grado 2 si ha

$$L_0(t) = \frac{t(t-0.774597)}{1.2},$$

$$L_1(t) = \frac{(t+0.774597)(t-0.774597)}{-0.6},$$

$$L_2(t) = \frac{t(t+0.774597)}{1.2}.$$

Utilizzando la formula di grado 1 appena trovata si ricava

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_0(t)dt = L_0(-0.577350) + L_0(0.577350) =$$

$$= \frac{-0.577350(-0.577350-0.774597)}{1.2} + \frac{0.577350(0.577350-0.774597)}{1.2} =$$

$$= 0.650456 - 0.0949 = 0.555556,$$

e gli altri pesi possono essere ricavati sia allo stesso modo di w_0 che sfruttando le relazioni di simmetria e somma dei pesi:

$$w_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)dt = L_1(-0.577350) + L_1(0.577350) = 2 - 2w_0$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} L_2(t)dt = L_2(-0.577350) + L_2(0.577350) = w_0.$$

I pesi della formula di grado 3 si calcolano con la stessa tecnica; anche qui se si sfrutta la simmetria e la somma totale dei pesi, basta applicare una sola quadratura (ed in questo caso puó essere sia quella di grado 1 che quella di grado 2).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 13.06.05

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo iterativo di Jacobi (5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \tag{$*$}$$

costruire un sistema equivalente a $(*)$ in modo che sia risolvibile con il metodo di Gauss–Seidel (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di Newton per equazione scalari nonlineari e le sue principali varianti (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (6 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (3 punti);

b) costruire la retta di errore quadratico minimo per i punti della tabella seguente:

x_i	y_i
-1.2	0.1
-1.0	0.3
-0.5	0.4
0.0	1.0
0.2	0.8
1.0	1.1
1.1	1.4

(5 punti).

Esercizio 4.

a) Calcolare i pesi delle formule di Newton–Cotes a tre nodi, sia aperta che chiusa (3+3 punti);

b) dimostrare che una formula di quadratura con $n+1$ nodi $x_0, \ldots, x_n$, con grado di precisione $\nu \geq n$, é necessariamente ottenuta dalla integrazione del polinomio di Lagrange (*Suggerimento*: applicare la formula di quadratura alle funzioni della base di Lagrange relative ai nodi $x_0, \ldots, x_n$) (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Poiché scambiando le righe non si ottiene comunque una matrice a diagonale dominante, si puó cercare di sfruttare la condizione di positivitá della matrice del sistema. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

é simmetrica ma non definita positiva, quindi si tratta di moltiplicare entrambi i membri del sistema a sinistra per A^t, ottenendo il sistema $A^tAx = A^tb$, ovvero

$$\begin{cases} 10x_1 + 18x_2 = 14 \\ 18x_1 + 34x_2 = 30 \end{cases}$$

Esercizio 3.

b) Messa la retta nella forma $y = ax + b$, il sistema da risolvere é

$$\begin{cases} a\sum_i x_i^2 + b\sum_i x_i = \sum_i x_i y_i \\ a\sum_i x_i + b\sum_i 1 = \sum_i y_i \end{cases}$$

ovvero, con i dati dell'esercizio,

$$\begin{cases} 4.94\,a - 0.4\,b = 2.18 \\ -0.4\,a + 7\,b = 5.1 \end{cases}$$

la cui soluzione, con sei cifre decimali, é $a = 0.502615$, $b = 0.757292$.

Esercizio 4.

a) Il calcolo é effettuato nelle prove rispettivamente del 14.09.00 e del 12.06.00.

b) Se la formula di quadratura $\sum_j \alpha_j f(x_j)$ ha grado di precisione almeno n, le funzioni $L_i(x)$ della base di Lagrange relativa ai nodi $x_0, \ldots, x_n$ sono integrate esattamente. D'altra parte, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ e quindi

$$\int_a^b L_i(x)dx = \sum_j \alpha_j L_i(x_j) = \sum_j \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$$

e quindi i pesi della formula di quadratura sono effettivamente l'integrale delle funzioni della base di Lagrange.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 04.07.05

Esercizio 1. Si consideri una matrice A tridiagonale, per la quale cioé $a_{ij} = 0$ se $j > i+1$ o se $j < i-1$. Si riformuli il metodo di fattorizzazione LU non pivotata per questa matrice, mostrando in particolare che anche i fattori triangolari L ed U sono tridiagonali (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza monotona per il metodo di Newton (6 punti);

b) Dimostrare che una funzione di iterazione del tipo

$$g(x) = x + \alpha(x)f(x)$$

con α limitata e derivabile, non puó essere una contrazione nell'intorno di una radice multipla (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) maggiorare il piú accuratamente possibile l'errore di una interpolazione di terzo grado della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a nodi equidistanti sull'intevallo $[-1, 1]$ (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya sulla convergenza delle formule di quadratura (6 punti);

b) dire perché il teorema di Polya *non é applicabile* a funzioni Riemann–integrabili ma non continue (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1. Notiamo intanto che dire che i due fattori L ed U sono contemporaneamente triangolari e tridiagonali equivale a dire che per entrambe le matrici gli elementi non nulli sono sulla diagonale principale e rispettivamente sulla sotto– o sopra–diagonale. Notiamo anche che si intende che la fattorizzazione LU possa essere compiuta senza scambio di righe, visto che in caso contrario la struttura tridiagonale della matrice verrebbe distrutta.

Un modo semplice di risolvere l'esercizio é di notare che nella eliminazione di Gauss la variabile j–esima va eliminata solo dalla equazione $(j+1)$–esima non comparendo nelle successive. Questo fa sí che la matrice L (che é costituita dai moltiplicatori) sia tridiagonale. D'altra parte, sostituendo ad una riga la sua combinazione lineare con righe *precedenti* di una matrice (supposta induttivamente) tridiagonale, non vengono modificati gli elementi al di sopra della sopradiagonale, che restano quindi nulli. Questo mostra che anche la matrice U é tridiagonale.

Esercizio 2.

b) Per una funzione g nella forma indicata si ottiene:

$$g'(x) = 1 + \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$$

e poiché in una radice $\bar{x}$ multipla si ha $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$, allora $g'(\bar{x}) = 1$ e non é possibile trovare un intorno di $\bar{x}$ in cui g sia una contrazione. Si puó notare che il metodo di Newton non rientra in questo quadro: infatti la funzione $\alpha(x) = -1/f'(x)$ non é limitata per $x \to \bar{x}$ se la radice é multipla.

Esercizio 3.

b) Si ha

$$\omega_3(x) = (x^2 - 1/9)(x^2 - 1) = x^4 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{1}{9}$$

Per calcolare gli estremi del polinomio ω_3 si annulla la derivata:

$$\omega_3'(x) = 4x^3 - \frac{20}{9}x = 4x\left(x^2 - \frac{5}{9}\right) = 0.$$

Questo individua i tre estremi $x = 0$, $x = \pm\sqrt{5}/3$. Il massimo modulo si ottiene nel secondo caso e vale

$$\max_{[-1,1]} |\omega_3(x)| = \frac{16}{81}.$$

Piú dificile é la maggiorazione di $|f^{(4)}(x)|$ che ha una espressione piuttosto complessa. Si puó dimostrare (in modo non del tutto ovvio) che il suo massimo modulo vale $f^{(4)}(0) = 4!$ (quest'ultimo valore si puó anche ottenere dalla serie geometrica che definisce $f(x)$ in $[-1,1]$). Si ottiene finalmente la maggiorazione

$$|f(x) - \Pi_3(x)| \le \frac{4!}{4!}\frac{16}{81} \approx 0.198.$$

Esercizio 4.

b) Il teorema di Polya si basa sulla possibilitá di approssimare uniformemente una funzione continua mediante polinomi. Questo non accade per funzioni discontinue.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 04.07.05

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di discesa piú ripida (6 punti);

b) descrivere le principali strategie di scelta del passo (3 punti);

Esercizio 2. Dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_2 - \sin \frac{\pi x_1}{2} = 0 \end{cases}$$

a) dire se la soluzione $(1, 1)$ é ottenibile mediante il metodo di Newton e scriverne esplicitamente la iterazione in forma di sistema lineare (3 punti);

b) scrivere una versione approssimata (e convergente) dello stesso metodo nella forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - P\,F(x^{(k)})$$

per una opportuna matrice costante P (4 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza degli schemi ad un passo espliciti per problemi di Cauchy (6 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Lax–Richtmeyer (6 punti);

Data l'equazione del trasporto

$$u_t + a u_x = 0$$

con condizioni periodiche $u(0, t) = u(1, t)$, e lo schema completamente discreto

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^k + u_{j+1}^k) - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) \quad (j = 1, \ldots, N)$$

in cui vengano identificati i nodi x_1 e x_N,

b) porre lo schema nella forma matriciale $U_{k+1} = AU_k$ specificando la matrice $A(\Delta t, \Delta x)$ (3 punti);

c) dare la condizione di stabilitá (intesa nel senso della equilimitatezza degli autovalori di A^k al variare di k) in funzione dei passi di discretizzazione (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Si tratta di verificare che la Jacobiana del sistema,

$$J_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

é non singolare in un intorno della soluzione. Si ha infatti

$$J_F(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La scelta "ideale" sarebbe quella di porre $P = J_F(\bar{x})^{-1}$, ovvero

$$P = J_F(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con la quale si otterrebbe convergenza quadratica. Piú realisticamente, si puó porre $P = J_F(x^{(0)})^{-1}$ per un $x^{(0)}$ sufficientemente vicino a $\bar{x}$.

Esercizio 4.

b) Si ha:

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
\frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & \cdots & 0 \\
 & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
\frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x}
\end{pmatrix}$$

c) La condizione di stabilitá richiesta equivale ad imporre che gli autovalori di A siano nel disco unitario, in modo che le loro potenze successive non divergano. I dischi di Gershgorin della matrice hanno tutti centro nell'origine e raggio

$$r = \left|\frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right| + \left|\frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right| = \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} + \left|\frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right|$$

Se l'argomento del valore assoluto é negativo, si ha $r > 1$ e la condizione di stabilitá non é soddisfatta. Se invece é positivo o nullo, si ottiene identicamente $r = 1$ e lo schema é stabile. La condizione da soddisfare é quindi

$$\frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} \geq 0$$

ovvero

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$$

che corrisponde alla normale condizione CFL.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 12.09.05

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione di Cholesky, dando le condizioni per la sua applicabilitá (4 punti);

b) dire come (e con quale complessitá) puó essere calcolato il determinante di una matrice fattorizzata nella forma di Cholesky (2 punti).

Esercizio 2.

a) Scrivere un diagramma di flusso per il metodo di bisezione (4 punti);

b) enunciarne e dimostrarne il relativo teorema di convergenza (5 punti);

c) data l'equazione

$$x^3 - 5 = 0,$$

trovare un intervallo in cui tale equazione é risolvibile con il metodo delle corde *in modo tale da avere una convergenza piú rapida che con il metodo di bisezione* (5 punti).

Esercizio 3.

a) Dare una panoramica dei principali criteri di approssimazione di funzioni di una variabile (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore (5 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sulla positivitá dei pesi delle formule Gaussiane (5 punti);

b) dire in quale modo questo risultato permette di provare la convergenza delle formule Gaussiane per funzioni continue (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Seguendo lo stesso principio usato per la fattorizzazione LU, si ha

$$\det A = \det L \cdot \det L^t = (\det L)^2 = \Big(\prod_i l_{ii}\Big)^2.$$

Il calcolo del determinante a partire dalla matrice fattorizzata richiede quindi la complessitá supplementare di n prodotti.

Esercizio 2.

c) Dato che nel metodo di bisezione l'errore approssimativamente si dimezza ad ogni iterazione, si tratta di trovare un intervallo di applicazione del metodo delle corde per il quale la costante di contrazione sia $L < 1/2$. Ad esempio si puó prendere $[a, b] = [3/2, 2]$ (in questo intervallo la funzione cambia anche di segno), ottenendo con questa scelta la funzione di iterazione:

$$g(x) = x - \frac{4}{37}(x^3 - 5),$$

per la quale si ha su $[a, b]$ la costante di contrazione

$$L = \max_{[a,b]} |g'(x)| = \max_{[a,b]} \left|1 - \frac{12}{37}x^2\right| = |g'(2)| = \frac{48}{37} - 1 \approx 0.3.$$

Esercizio 4.

b) Si allude ovviamente al fatto che dalla positivitá dei pesi discende che

$$\sum_i |\alpha_i| = \sum_i \alpha_i = b - a$$

e questo permette di soddisfare la prima ipotesi del teorema di Polya.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 12.09.05

Esercizio 1.

a) Descrivere le principali strategie di scelta della direzione di ricerca nei metodi di discesa (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo di Newton in ricerca esatta (6 punti).

Esercizio 2.

a) Confrontare (a grandi linee) le strategie di minimizzazione vincolata di tipo primale e duale (3 punti);

b) Descrivere il metodo del gradiente proiettato ed enunciarne il teorema di convergenza (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la costruzione e le caratteristiche generali dei metodi di Adams espliciti ed impliciti e dei metodi Predictor–Corrector (4 punti);

b) calcolare i coefficienti del metodo di Adams esplicito a due passi (4 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere l'approssimazione semidiscreta "upwind" dell'equazione del trasporto e dimostrarne la consistenza (4 punti);

b) Dimostrare che una approssimazione della derivata prima ottenuta derivando in un nodo x_0 il polinomio interpolatore Π_n (con $n > 0$) é sempre consistente con $f'(x_0)$ (*Suggerimento*: utilizzare la forma di Newton di Π_n e ricordare che $h \to 0$. Cosa si ottiene derivando i singoli termini?) (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 3.

b) Si tratta di integrare tra x_k ed x_{k+1} il polinomio interpolatore di $f_j \equiv f(x_j, u_j)$ costruito sui nodi x_k ed x_{k-1}. Ponendo convenzionalmente $h = 1$ ed $x_k = 0$, il polinomio interpolatore ha la forma

$$\Pi_1(x) = f_{k-1}(-x) + f_k(x+1),$$

ed integrandolo in $[0,1]$ si ha

$$\int_0^1 \Pi_1(x)dx = f_{k-1}\int_0^1 (-x)dx + f_k\int_0^1 (x+1)dx = -\frac{1}{2}f_{k-1} + \frac{3}{2}f_k,$$

ottenendo quindi lo schema

$$u_{k+1} = u_k + h\left[\frac{3}{2}f(x_k,u_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1},u_{k-1})\right].$$

Esercizio 4.

b) Ricordiamo che la derivata di un prodotto di $k+1$ funzioni si ottiene sommando $k+1$ termini in cui "si deriva una funzione per volta", ad esempio:

$$D(fgh) = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Nel caso dei polinomi $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$, si ha $D(x-x_j) = 1$ e quindi

$$D\big[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)\big] =$$

$$= (x-x_1)\cdots(x-x_k)+(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_k)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

da cui si ha, tenendo conto che il passo tra i nodi é stato indicato con h:

$$D\big[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)\big]_{x=x_0} = (x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k) = O(h^k).$$

Derivando in x_0 il polinomio di Newton si ottiene perció

$$D\Big[\Pi_n(x)\Big]_{x=x_0} = f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2]\,O(h) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n]\,O(h^{n-1})$$

ed infine, passando al limite per $h \to 0$ e tenendo conto che $f[x_0,x_1]$ é il rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} D\Big[\Pi_n(x)\Big]_{x=x_0} = f'(x_0)$$

(in cui si é anche tenuto conto del fatto che le differenze divise successive coincidono a meno di costanti con i rapporti incrementali di ordine superiore al primo, e restano quindi limitate per $h \to 0$ se f é regolare).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 23.01.06

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di Eliminazione di Gauss, nella versione con pivotazione parziale (3 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU di una matrice il fattore L ha per elementi fuori diagonale i moltiplicatori (5 punti).

Esercizio 2.

a) Dare una panoramica dei principali metodi iterativi per equazioni scalari nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema relativo all'ordine di convergenza di tali metodi ed applicarlo al metodo di Newton (5 punti);

c) intendendo trovare le radici dell'equazione

$$x + \tan x = 0,$$

con il metodo di Newton, studiare il problema di scegliere l'approssimazione iniziale x_0 a seconda della radice di interesse, in modo che il metodo sia convergente (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per Errore Quadratico Minimo (3 punti);

b) Data la tabella

x_i	y_i
-1.0	-0.2
-0.5	0.8
0.0	0.6
0.5	-0.1
1.0	1.1

costruire il sistema lineare che definisce la approssimazione nella base $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x$, $\phi_3(x) = \sin(\pi x)$ (5 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle formule di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) dare la forma composita della formula di NC aperta di grado 1 ed integrare con questa formula la funzione $\sin x$ in $[0, \pi]$ utilizzando due sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) In un generico intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ di definizione, la tangente é una funzione crescente, concava nel semi–intervallo sinistro e convessa in quello destro. Se si somma la funzione x queste proprietá restano vere, mentre le radici si spostano in $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ se $k<0$ ed in $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2k\pi\right)$ se $k>0$. Il modo piú semplice di scegliere un punto iniziale é quindi "vicino a $\frac{\pi}{2}+2k\pi$" (cioé a destra della radice, in modo tale che f sia crescente e convessa in $[\bar{x}, x_0]$) se $k<0$ e viceversa se $k>0$.

Esercizio 3.

b) La matrice Ψ é una matrice 5×3 data da:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \sin(\pi x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_5 & \sin(\pi x_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -0.5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza si ha

$$\Psi^t\Psi = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Psi^t y = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 0.85 \\ -0.9 \end{pmatrix}$$

che rappresentano rispettivamente matrice e termine noto del sistema delle equazioni normali. Vale la pena di osservare che basi miste sinusoidali / polinomiali come quella proposta nell'esercizio vengono utilizzate ad esempio per separare una componente periodica da una ad andamento piú lento in misure sperimentali (ad esempio, la temperatura ambiente).

Esercizio 4.

b) Supponendo di lavorare con una griglia di nodi equidistanti $x_0, \ldots, x_n$ a passo h e con $n=3k$, la formula composita richiesta si scrive in generale

$$I_{1,k} = \frac{3h}{2}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+f(x_5)+\cdots+f(x_{3k-5})+f(x_{3k-4})+f(x_{3k-2})+f(x_{3k-1})].$$

Nel caso particolare si ha $h=\pi/6$ e la quadratura vale

$$I_{1,2} = \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) \approx 2.145748$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 05.04.06

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione LU senza pivoting (3 punti);

b) dimostrare che il fattore triangolare inferiore L ha per elementi i moltiplicatori (5 punti);

c) supponendo di risolvere per fattorizzazione LU il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ 10x_1 + 51x_2 = 5, \end{cases}$$

e calcolando il condizionamento di questo metodo nella norma $\|\cdot\|_\infty$ come $K_\infty(L)K_\infty(U)$, maggiorare l'errore relativo sulla soluzione del sistema nei due casi in cui venga o non venga effettuata pivotazione, supponendo un errore sul termine noto $\|\delta b\|_\infty \leq 10^{-7}$ (4+4 punti).

Esercizio 2.

a) Esporre i principali metodi iterativi per Sistemi Lineari, enunciandone i risultati di convergenza (4 punti);

b) discuterne i criteri di arresto dimostrando una maggiorazione di errore esplicita (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare i teoremi sulla convergenza locale e l'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ (4+5 punti).

Dato il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \arctan f(x_k),$$

b) calcolarne la costante di contrazione e dimostrare che converge in ogni intervallo chiuso e limitato contenente una radice ed in cui $0 < f'(x) < 2$ (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) Nel caso in cui non si operi pivotazione si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 51 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha perció

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza $K_\infty(L)K_\infty(U) = 121 \cdot 36 = 4356$. Poiché $\|\delta b\|_\infty/\|b\|_\infty = 10^{-8}$, la perturbazione relativa sulla soluzione si maggiora come $\|\delta x\|_\infty/\|x\|_\infty \leq 4.356 \cdot 10^{-5}$. Nel caso invece in cui si operi pivotazione:

$$PA = \begin{pmatrix} 10 & 51 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 10 & 51 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha anche

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1 & 51 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

ed infine $K_\infty(L)K_\infty(U) = 1.21 \cdot 3117.1 = 3771.7$. In questo secondo caso si ottiene $\|\delta x\|_\infty/\|x\|_\infty \leq 3.772 \cdot 10^{-5}$.

Esercizio 3.

b) Si ha:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$$

ed il coefficiente di contrazione é ovviamente il massimo modulo di questa quantitá. Se $f'(x) > 0$, il secondo termine del secondo membro é positivo e quindi $g'(x) < 1$. D'altra parte si ha anche

$$\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} < f'(x)$$

e quindi $g'(x) > 1 - f'(x)$, da cui si ottiene $g'(x) > -1$ se $f'(x) < 2$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 01.06.06

Esercizio 1.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per Errore Quadratico Minimo (3 punti)

Data la tabella di punti

x_i	y_i
-1.0	1.2
-0.5	0.5
0.0	0.2
0.5	0.4
1.0	1.3

b) darne una approssimazione per EQM mediante un polinomio *pari* di grado 2 (5 punti);

c) calcolare mediante il punto *b*) l'integrale approssimato in $[-1, 1]$ della funzione descritta dalla tabella e confrontarlo con una approssimazione di Newton–Cotes a scelta (2+2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) discutere le principali strategie di infittimento dei nodi e le relative proprietá di convergenza dell'approssimazione (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la costruzione e le caratteristiche principali della quadrature di Newton–Cotes (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le quadrature di NC composite (6 punti);

c) calcolare mediante una quadratura di Simpson composita l'integrale

$$\int_0^{10} e^{-x} dx$$

utilizzando 11 nodi (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La approssimazione richiesta, ovvero un polinomio pari di secondo grado, si costruisce con le due funzioni di base $\varphi_1(x) = 1$ e $\varphi_2(x) = x^2$. In corrispondenza di questa scelta, si ha

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m^2 \end{pmatrix}$$

ed il sistema delle equazioni normali $\Phi^t \Phi a = \Phi^t y$ si scrive esplicitamente come

$$\begin{cases} a_1 m + a_2 \sum_i x_i^2 = \sum_i y_i \\ a_1 \sum_i x_i^2 + a_2 \sum_i x_i^4 = \sum_i x_i^2 y_i \end{cases}$$

ovvero, con i dati del problema:

$$\begin{cases} 5\, a_1 + 2.5\, a_2 = 3.6 \\ 2.5\, a_1 + 2.125\, a_2 = 2.725 \end{cases}$$

ed ha la soluzione $a_1 \approx 0.191$, $a_2 \approx 1.057$.

c) Integrando l'approssimazione $\pi(x) = a_1 + a_2 x^2$ si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \pi(x) dx = 2a_1 + \frac{2}{3} a_2 \approx 1.087.$$

D'altra parte, applicando la formula dei trapezi in $[-1, 1]$ si ha

$$I_{1,4}(f, -1, 1) = 2.35.$$

Altra possibilitá é di utilizzare la formula di Simpson che fornisce

$$I_{2,2}(f, -1, 1) \approx 1.083.$$

Esercizio 3.

c) Esplicitamente, la quadratura di Simpson richiesta si calcola come

$$I_{2,5}(e^{-x}, 0, 10) =$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 4e^{-1} + 2e^{-2} + 4e^{-3} + 2e^{-4} + 4e^{-5} + 2e^{-6} + 4e^{-7} + 2e^{-8} + 4e^{-9} + e^{-10}) \approx$$

$$\approx 1.004912.$$

L'integrale esatto vale $1 - e^{-10} \approx 0.999955$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 12.06.06

Esercizio 1.
a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss e le sue varianti pivotate (3 punti);
b) dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.
a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti);
b) supponendo di cercare il valore $\sqrt{2}$ come zero dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ in $[a, b] = [1, 2]$, calcolare quante iterazioni sono necessarie per calcolarlo con un errore non superiore a 10^{-3} utilizzando il metodo di bisezione (3 punti).

Esercizio 3.
a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);
b) dopo aver descritto l'approssimazione per interpolazione di Hermite, enunciare la corrispondente rappresentazione dell'errore per il polinomio di Hermite (4 punti);
c) maggiorare l'errore di interpolazione per un polinomio di Hermite di terzo grado con le condizioni $H_3(0) = f(0)$, $H_3'(0) = f'(0)$, $H_3(\pi) = f(\pi)$, $H_3'(\pi) = f'(\pi)$ e $f(x) = \sin x$ (4 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Poiché l'errore massimo all'iterazione k–esima é maggiorato da

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

e $b_0 - a_0 = 1$, il primo valore di k per cui si scende al di sotto dell'errore richiesto é $k = 10$ (infatti $2^{-10} = 1/1024$).

Esercizio 3.

c) La formula di rappresentazione dell'errore ha la forma

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Omega_3(x), \quad \Omega_3(x) = x^2(x-\pi)^2.$$

Tenendo conto del fatto che $|f^{(4)}(x)| \leq 1$ e che il massimo di Ω_3 (come é facile verificare) si ha per $x = \pi/2$, si ottiene quindi

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \frac{1}{4!}\Omega_3(\pi/2) = \frac{(\pi/2)^4}{4!} \approx 0.25367.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 10.07.06

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione dei sistemi lineari con i rispettivi risultati di convergenza (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema relativo all'ordine di convergenza dei metodi iterativi nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ per equazioni scalari del tipo $f(x) = 0$ ed applicarlo al metodo di Newton (6 punti);

b) dimostrare che se la funzione f ha un flesso nella radice $\bar{x}$, il metodo di Newton converge con ordine almeno cubico (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere e dimostrare la costruzione dei polinomio di Newton e la formula delle differenze divise (6 punti);

b) utilizzando il ruolo che la differenza divisa di ordine massimo ha nel polinomio interpolatore, e la unicitá del polinomio stesso, dimostrare che una differenza divisa é invariante rispetto all'ordine con cui si considerano i nodi (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il Teorema di Polya (6 punti);

b) Calcolare una approssimazione dell'integrale

$$\int_0^2 x^{-1/2} dx$$

mediante una formula di Gauss–Legendre a 5 nodi (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Posto il metodo nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, la condizione di convergenza cubica é che $g'(\bar{x}) = g''(\bar{x}) = 0$. A conti fatti, si ha

$$g'(x) = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

$$g''(x) = -\frac{f'(x)^2[f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)] - 2f'(x)^2 f''(x)^2}{f'(x)^4}.$$

Il metodo di Newton soddisfa in ogni caso la condizione $g'(\bar{x}) = 0$, mentre la seconda condizione $g''(\bar{x}) = 0$ é appunto soddisfatta se la radice é anche un punto di flesso poiché $f(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = 0$.

Esercizio 3.

b) Poiché la costruzione del polinomio di Newton non richiede di considerare i nodi con un ordine particolare, ogni permutazione degli indici dei nodi é ammissibile e porta all'unico polinomio interpolatore di f. D'altra parte, in un polinomio interpolatore di grado n la differenza divisa $f[x_0, \ldots, x_n]$ coincide con il coefficiente del termine di grado massimo. Di conseguenza ogni permutazione $x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}$ dei nodi porta ad una identica differenza divisa $f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, \ldots, x_n]$.

Esercizio 4.

b) Per applicare la formula di Gauss–Legendre sull'intervallo $[0, 2]$ occorre ricalcolare i nodi, mentre i pesi restano invariati. Si ha

$$x_i = t_i + 1, \quad \alpha_i = w_i.$$

A conti fatti, lavorando con otto cifre decimali, la formula di quadratura richiesta vale:

$$I_4(x^{-1/2}, 0, 2) = 0.23692689 \cdot (0.09382015^{-1/2} + 1.90617985^{-1/2}) +$$

$$+0.47862867 \cdot (0.46153069^{-1/2} + 1.53846931^{-1/2}) + 0.56888889 \cdot 1 \approx 2.60441557.$$

Il valore esatto dell'integrale é $2\sqrt{2} \approx 2.82842712$. In questo caso la funzione integranda *non é continua* e quindi i risultati noti fin qui non permettono di dire se ci si possa aspettare convergenza al valore esatto dell'integrale.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 11.09.06

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione di Cholesky e calcolarne la complessitá computazionale (3+3 punti);

b) data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 19 \end{pmatrix}$$

calcolarne la fattorizzazione di Cholesky (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) supponendo di cercare il valore dell'unico zero positivo dell'equazione

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$$

individuare un intervallo in cui questo possa essere fatto utilizzando il metodo delle corde (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per Errore Quadratico Minimo (3 punti).

Data la tabella di punti

x_i	y_i
-1.5	1.1
-1.0	0.8
-0.8	0.4
0.1	-0.1
0.2	0.0
1.0	-1.0
1.4	-1.6

b) calcolarne la retta di minimo errore quadratico (5 punti);

c) calcolare il numero di condizionamento del sistema lineare associato al punto precedente (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare le principali proprietá delle formule di Gauss–Legendre e dimostrare il teorema di positività dei pesi (2+5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si ha $A = LL^t$ con

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

b) La radice di questa equazione (come si puó verificare con una tabulazione sommaria) é compresa tra 3/2 e 2. Utilizzando ad esempio questi due punti come estremi per il metodo delle corde, si ottiene $f(a) = f(1.5) = -1.375$, $f(b) = f(2) = 1$, e la funzione di iterazione del metodo delle corde (calcolata con sei decimali) ha perció la forma

$$g(x) = x - 0.210526\, f(x).$$

Nell'intervallo considerato, la sua derivata $g'(x)$ é decrescente e non ha estremi interni, si ha quindi

$$-0.473682 = g'(2) \le g'(x) \le g'(1.5) = 0.421054$$

ed il metodo é convergente.

Esercizio 3.

b) Messa la retta nella forma $y = ax + b$, il sistema delle equazioni normali é

$$\begin{cases} a \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i = \sum_i x_i y_i \\ a \sum_i x_i + b \sum_i 1 = \sum_i y_i \end{cases}$$

cioé, con i dati della tabella,

$$\begin{cases} 6.9\, a - 0.6\, b = -6.02 \\ -0.6\, a + 7\, b = -0.4 \end{cases}$$

la cui soluzione, con sei cifre decimali, é $a = -0.884022$, $b = -0.132916$.

c) Indicata con $A = \Phi^t \Phi$ la matrice del sistema, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{47.94} \begin{pmatrix} 7 & 0.6 \\ 0.6 & 6.9 \end{pmatrix}.$$

e calcolando il condizionamento ad esempio nella norma $\| \cdot \|_\infty$,

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{7.6^2}{47.94} \approx 1.205.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.01.07

Esercizio 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 15 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

a) Scrivere esplicitamente il metodo di Jacobi per risolverlo (3 punti);
b) calcolarne la costante di contrazione nelle norme $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_\infty$ (3+3 punti).

Esercizio 2.
a) Descrivere il metodo di Steffensen e dimostrare che ha convergenza quadratica (6 punti);
b) scrivere il metodo di Steffensen per l'equazione

$$x^2 - a = 0,$$

semplificando ove possibile (2 punti).

Esercizio 3.
a) Dimostrare esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore nella forma di Lagrange (5 punti).
b) scrivere la base di Lagrange associata ai tre punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e calcolarne la costante di Lebesgue in $[-1, 1]$ (3+3 punti).

Esercizio 4.
a) Costruire la formula di Simpson e darne la versione composita (2+2 punti);
b) approssimare con tale formula l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

dividendo l'intervallo di integrazione in quattro sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) La matrice del sistema non é a diagonale dominante, ma lo diviene con una opportuna permutazione delle righe. Il metodo di Jacobi per il sistema con le righe permutate si scrive

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - 1/5\, x_2^{(k)} + 3/5\, x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 7/2 - 1/2\, x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 1/10 - 3/10\, x_1^{(k)} - 1/2\, x_2^{(k)} \end{cases}$$

b) La matrice di iterazione (jacobiana) del metodo é:

$$B = J_T = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -3/10 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la costante di contrazione vale $L = \|J_T\|_\infty = 4/5$ nella norma $\|\cdot\|_\infty$. Nella norma $\|\cdot\|_1$ il metodo non é invece contrattivo poiché $L = \|J_T\|_1 = 11/10$.

Esercizio 2.

b) Posto $f(x) = x^2 - a$, l'iterazione del metodo di Steffensen é data da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} =$$

$$= x_k - \frac{(x_k^2 - a)^2}{(x_k + (x_k^2 - a))^2 - a - (x_k^2 - a)} =$$

$$= x_k - \frac{(x_k^2 - a)^2}{x_k^4 + 2x_k^3 - 2ax_k^2 - 2ax_k + a^2} =$$

$$= x_k - \frac{(x_k^2 - a)^2}{(x_k^2 - a)^2 + 2x_k(x_k^2 - a)} =$$

$$= x_k - \frac{x_k^2 - a}{x_k^2 + 2x_k - a}$$

Esercizio 3.

b) La funzione di Lebesgue $\sum_i |L_i(x)|$ assume valore unitario in tutti i nodi. Nel caso in esame, tale funzione é quadratica nell'intervallo tra un nodo e l'altro, quindi il suo massimo viene ottenuto nel punto medio tra due nodi, che per ragioni di simmetria puó essere preso equivalentemente in $\pm 1/2$. Per la costante di Lebesgue si ottiene quindi il valore:

$$\Lambda_2 = \sum_i \left| L_i\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{4}.$$

Esercizio 4.

b) La formula richiesta utilizza nove nodi ($h = 1/4$), in corrispondenza dei quali la funzione assume i valori

$$f(-1) = f(1) = 0,$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0.661438,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025,$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0.968246.$$

Con sei cifre decimali, la formula di quadratura richiesta si scrive quindi

$$I_{2,4}(\sqrt{1-x^2}, -1, 1) = \frac{1}{12}(4 \cdot 0.661438 + 2 \cdot 0.866025 + 4 \cdot 0.968246 + 2+$$

$$+4 \cdot 0.968246 + 2 \cdot 0.866025 + 4 \cdot 0.661438) \approx 1.541798.$$

Il valore esatto é $\pi/2 \approx 1.570796$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 06.04.07

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo della fattorizzazione LU per la soluzione dei sistemi lineari (3 punti);

b) dimostrare che la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel per la soluzione di sistemi lineari (3 punti);

b) enunciarne i risultati di convergenza e dimostrare quello relativo al metodo di Jacobi (6 punti);

c) scrivere esplicitamente la condizione di contrattivitá nella norma $\|\cdot\|_1$, sempre per il metodo di Jacobi (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi di tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) dato un polinomio $p(x)$ che ha tutti gli zeri reali e distinti, dire come si puó scegliere l'approssimazione iniziale per un metodo di Newton in modo che converga sicuramente ad una delle due radici estreme (4 punti);

c) data l'equazione algebrica

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0$$

scrivere un metodo di Newton per la sua soluzione in modo da minimizzare il numero di operazioni per iterazione (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) La matrice di iterazione $B = J_T$ ha elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Applicando la definizione di norma $\|\cdot\|_1$ sulle matrici, ed imponendo che $\|B\|_1 < 1$, si ha

$$\sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Tale condizione *non coincide con la dominanza diagonale per colonne*, a meno che le equazioni non vengano riscalate in modo da ottenere elementi unitari sulla diagonale della matrice del sistema.

Esercizio 3.

b) Se deg $p(x) = n$, supponiamo che il coefficiente della potenza di ordine massimo sia positivo ed indichiamo con $\bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ le sue radici. Allora deg $p'(x) = n - 1$ ed applicando il teorema di Rolle tra ogni coppia di radici si vede che vi é uno ed un solo estremo di p tra due radici contigue, e non ci sono estremi esterni all'intervallo $(\bar{x}_1, \bar{x}_n)$. Con analogo ragionamento fatto sulla derivata prima, si vede che esternamente a quest'intervallo non ci sono neanche punti di flesso. Per $x > \bar{x}_n$, il polinomio é quindi sempre crescente e convesso, mentre per $x < \bar{x}_1$, il polinomio é crescente e concavo se n é dispari, decrescente e convesso se n é pari. Basta quindi prendere x_0 esterno all'intervallo delle radici (ad esempio, utilizzando il teorema di localizzazione delle radici di Cauchy) per ottenere convergenza monotona.

c) Il numero di operazioni si puó ridurre (sia pure di poco) effettuando la divisione tra i polinomi $f(x)$ ed $f'(x)$. Si ottiene la funzione di iterazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 6x - 2} = \cdots = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{x+1}{9x^2 + 18x - 6}.$$

Altro espediente che riduce la complessitá é di calcolare (il numeratore e) il denominatore con la regola di Horner, ed in questo caso la funzione di iterazione assume la forma

$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{x+1}{(9x+18)x - 6}.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 06.06.07

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) data la funzione $f(x) = e^x$, maggiorare l'errore di interpolazione in $[-2, 2]$ per un polinomio interpolatore costruito sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per Errore Quadratico Minimo (3 punti).

Data la tabella di punti

x_i	y_i
-2.5	-1.1
-1.0	-0.9
-0.5	0.4
0.4	0.2
0.8	1.0
1.0	1.2
3.4	2.6

b) calcolarne la retta di minimo errore quadratico (5 punti);

c) scrivere il sistema delle equazioni normali per una approssimazione di secondo grado (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) calcolare i pesi di una formula di quadratura costruita sui tre nodi dell'esercizio precedente, dire se tale formula rientra in qualcuna delle categorie notevoli studiate e darne il grado di precisione (3+1+1 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Calcolato $\omega_2 = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$, si verifica facilmente che il massimo modulo del polinomio si ha negli estremi, cioé

$$\|\omega_2\|_\infty = |\omega_2(\pm 2)| = 6.$$

Poiché si ha anche $|f'''(x)| \le f'''(2) = e^2 \approx 7.39$, la maggiorazione finale per $x \in [-2,2]$ é

$$|f(x) - \Pi_2(x)| \le \frac{\|f'''\|_\infty \|\omega_2\|_\infty}{3!} \approx 7.39.$$

Esercizio 2.

b) Messa la retta nella forma $y = ax + b$, il sistema delle equazioni normali, con i dati della tabella, é

$$\begin{cases} 7\,b + 1.6\,a = 3.4 \\ 1.6\,b + 20.86\,a = 14.37 \end{cases}$$

e la sua soluzione, con sei cifre decimali, é $b = 0.334114$, $a = 0.663251$.

c) Il sistema ha naturalmente sempre la struttura $\Phi^t \Phi a = \Phi^t y$, con:

$$\Phi^t\Phi = \begin{pmatrix} m & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi^t y = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

b) Si tratta di una formula di NC aperta a tre nodi (vedi es. 3 del 14.09.00).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 11.06.07

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, calcolandone le relative matrici di iterazione ed enunciandone i risultati di convergenza (5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 = 3 \end{cases}$$

calcolare in funzione di $\alpha \in R$ le condizioni di convergenza, sia solo sufficienti che necessarie e sufficienti, per il metodo di Gauss–Seidel (4+4 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza monotona per il metodo di Newton (5 punti);

Esercizio 3.

a) Descrivere e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (5 punti);

b) tabulare (con tre decimali) la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con passo $h = 1$ tra $x_0 = 1$ e $x_3 = 4$ e costruire la tavola delle differenze divise, indicando eventualmente i casi di perdita di cifre significative per sottrazione (3 punti);

c) stimare l'errore di interpolazione nell'intervallo $[x_1, x_2]$ nella situazione del punto precedente (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare le principali proprietá delle formule di Gauss–Legendre e dimostrare il teorema che ne dá il grado di precisione (2+5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La prima condizione sufficiente di convergenza é la dominanza diagonale stretta della matrice A del sistema, che richiede $|\alpha| > 1$. La seconda condizione é la positivitá di A (condizione applicabile in questo caso visto che la matrice é simmetrica). Poiché $a_{11} = 2 > 0$, si tratta di verificare che anche il determinante sia positivo. Si ha

$$|A| = 2\alpha - 1$$

e quindi la matrice A é definita positiva se e solo se $\alpha > 1/2$ (si noti che questa condizione é piú debole della precedente se $\alpha > 0$, ma non permette valori negativi). Infine, la condizione necessaria e sufficiente di convergenza é che il raggio spettrale della matrice di iterazione soddisfi $\rho(B) < 1$. Con le convenzioni usuali, la matrice di iterazione é data da $B = -(D + E)^{-1}F$, ovvero, con i dati dell'esercizio,

$$B = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

I due autovalori di B sono quindi $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1/(2\alpha)$ ed il metodo é convergente se e solo se $|\alpha| > 1/2$.

Esercizio 3.

b) La tabella dei valori della funzione é

x_i	$f(x_i)$
1	1.000
2	1.414
3	1.732
4	2.000

e le differenze divise richieste valgono

$$f[x_0, x_1] = 0.414, \quad f[x_1, x_2] = 0.318, \quad f[x_2, x_3] = 0.268$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = -0.048(*), \quad f[x_1, x_2, x_3] = -0.025(*)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.007(**)$$

dove si é indicato con $(*)$ e $(**)$ la perdita rispettivamente di una cifra e di due cifre decimali.

c) Tra i due nodi centrali, l'errore di interpolazione si puó maggiorare come

$$|f(x) - \Pi_3(x)| \le \frac{\max_{x\in[1,4]} |f^{(4)}(x)| \max_{x\in[2,3]} |\omega_3(x)|}{4!}.$$

D'altra parte, si ha

$$\max_{x\in[1,4]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[1,4]} \left| -\frac{15}{16} x^{-7/2} \right| = \frac{15}{16},$$

$$\max_{x\in[2,3]} |\omega_3(x)| = \omega_3(5/2) = \frac{9}{16},$$

e si ottiene quindi la stima finale:

$$|f(x) - \Pi_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{9}{16} \approx 0.022.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 09.07.07

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss e le strategie di pivotazione (3 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU, la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per equazioni scalari ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) determinare un intervallo iniziale opportuno per applicare all'equazione

$$e^x = 2\cos x$$

rispettivamente i metodi di bisezione e delle corde (1+4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Lagrange del polinomio interpolatore (5 punti);

b) definire la costante di Lebesgue, e descriverne il ruolo nello studio della stabilitá della operazione di interpolazione (3 punti);

c) calcolare il numero di nodi necessario perché l'errore nella interpolazione di secondo grado a tratti della funzione $f(x) = e^{-x}$ nell'intervallo $[0, 10]$ sia inferiore a 10^{-3}, lavorando a nodi equidistanti (5 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Definendo ad esempio $f(x) = e^x - 2\cos x$, si ha che per il metodo di bisezione é banalmente accettabile l'intervallo $[0, \pi/2]$, ed infatti $f(0) = -1$, $f(\pi/2) = e^{\pi/2} > 0$. Tale intervallo é in effetti accettabile anche per il metodo delle corde. Scritta la funzione di iterazione come

$$g(x) = x - \alpha f(x) = x - \frac{\pi/2}{f(\pi/2) - f(0)} f(x),$$

si ha $\alpha \approx 0.27$, ed inoltre

$$g'(x) = 1 - \alpha f'(x) = 1 - \alpha(e^x + 2\sin x).$$

Poiché nell'intervallo considerato si ha $1 \le e^x + 2\sin x \le e^{\pi/2} + 2 \approx 6.81$, si ha anche per la costante di contrazione la maggiorazione

$$\max_{[0,\pi/2]} |g'(x)| = |g'(\pi/2)| = 1 - \alpha(e^{\pi/2} + 2) \approx 0.84.$$

Il metodo delle corde é quindi convergente anche se non particolarmente efficiente.

Esercizio 3.

c) L'esercizio é analogo al 3.c del 03.02.03. Indichiamo con H l'ampiezza dei sottointervalli di interpolazione e con $h = H/2$ il passo tra i nodi. Si puó maggiorare l'errore di interpolazione come

$$|f(x) - \Pi_{2,H}(x)| \le \frac{\max_{[0,10]} |f'''(\xi)|}{6} \|\omega_2\|_\infty \le 10^{-3}$$

dove $\max_{[0,10]} |f'''(\xi)| = 1$. Maggiorando $\|\omega_2\|_\infty$ con $H^3 = 8h^3$ si ottiene

$$h \le (0.75 \cdot 10^{-3})^{1/3} \approx 0.091$$

che corrisponde a 111 nodi. Se per $\|\omega_2\|_\infty$ si utilizza la stima piú precisa, si ha la condizione

$$h \le (9\sqrt{3} \cdot 10^{-3})^{1/3} \approx 0.25$$

corrispondente a 41 nodi.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 13.09.07

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (6 punti);

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

b) Scrivere esplicitamente il metodo di Jacobi per risolverlo (2 punti);

c) dire se il metodo é convergente e calcolarne la costante di contrazione nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi di tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) data l'equazione

$$x^2 = \cos x$$

scrivere il metodo di Newton per la sua soluzione e discutere l'esistenza di un intorno di convergenza monotona per il metodo (1+3 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione e le piú usuali stime di errore che da essa derivano (6+2 punti);

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule di Newton–Cotes composite (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice del sistema diviene a diagonale dominante con una opportuna permutazione delle righe. Con la permutazione corretta, il metodo di Jacobi si scrive

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3/5 + 2/5\, x_2^{(k)} - 1/5\, x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/3 - 1/15 x_1^{(k)} - 2/3\, x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -5/3 - 1/3\, x_1^{(k)} + 1/3\, x_2^{(k)} \end{cases}$$

c) La matrice di iterazione (jacobiana) del metodo é:

$$B = J_T = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1/15 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

e la costante di contrazione nella norma $\|\cdot\|_\infty$ vale $L = \|J_T\|_\infty = \max(3/5, 11/15, 2/3) = 11/15$.

Esercizio 2.

b) Riscrivendo l'equazione come $f(x) = x^2 - \cos x = 0$, il metodo di Newton assume la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - \cos x_k}{2x_k + \sin x_k}.$$

Si puó notare che la $f(x)$ é pari e, per $x > 0$, é crescente e convessa. Infatti, si verifica in modo elementare che per $x > 0$:

$$f'(x) = 2x + \sin x > 0,$$

$$f''(x) = 2 + \cos x > 0.$$

Per ottenere convergenza monotona basta quindi scegliere $|x_0| > |\bar{x}|$, ad esempio per eccesso $|x_0| > \pi/2$ (in questo caso valori positivi di x_0 porteranno ad una successione convergente alla radice positiva, viceversa per i valori negativi).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 04.02.08

Esercizio 1.

a) Descrivere i metodi di soluzione di sistemi lineari $Ax = b$ per fattorizzazione della matrice A ed in particolare i metodi di Doolittle e Cholesky (4 punti);

b) risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 = 5 \\ 10x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$$

mediante il metodo diretto di complessitá asintotica piú bassa (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti);

b) data l'equazione

$$\sin x + x - 1 = 0$$

individuare un intervallo in cui possa essere applicato il metodo di bisezione e calcolare quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore minore di 10^{-4} (1+3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle approssimazioni per interpolazione in una base generica (6 punti);

b) calcolare la costante di Lebesgue nell'intervallo $[-1, 1]$ per un polinomio interpolatore costruito sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$ (4 punti).

Esercizio 4. Dopo aver descritto la strategia di quadratura di Gauss–Legendre, enunciare i principali risultati relativi a queste formule e dimostrare il teorema di positivitá dei pesi (2+6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice é simmetrica e definita positiva, infatti $a_{11} = 25 > 0$, $|A| = 25 > 0$. In queste condizioni il metodo di complessitá asintotica minore é la fattorizzazione di Cholesky. Si ha

$$\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}$$

ed applicando l'algoritmo di fattorizzazione si ottiene $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 5$, $l_{21} = a_{21}/l_{11} = 2$, $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 1$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^t.$$

Per risolvere il sistema $Ax = b$ si risolvono in sequenza i sistemi $Lz = b$ e $L^t x = z$. Dal primo,

$$\begin{cases} 5z_1 = 5 \\ 2z_1 + z_2 = 4 \end{cases}$$

si ottiene mediante le sostituzioni in avanti la soluzione $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Con questi valori si ottiene il secondo sistema,

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

che ha finalmente soluzione $x_1 = -3/5$, $x_2 = 2$.

Esercizio 2.

b) La radice dell'equazione (essendo la funzione $f(x) = \sin x + x - 1$ monotona crescente) é unica, ed é chiaramente positiva. Poiché $f(0) = -1$, $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \pi/4 - 1 > 0$, un intervallo adeguato potrebbe essere $[0, \pi/4]$. Per questo intervallo (la cui ampiezza é circa 1/2), l'errore richiesto si ottiene con 13 iterazioni.

Esercizio 3.

b) Iniziamo scrivendo le funzioni della base di Lagrange relativa ai nodi in questione. Si ha, dopo qualche semplificazione:

$$L_0(x) = \frac{2}{3}x\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$L_1(x) = -2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{4}{3}x(x+1).$$

Per il calcolo della costante di Lebesgue valgono le considerazioni fatte a proposito dell'esercizio 3.b del 15.01.07, in particolare basta prendere in considerazione i punti intermedi $x = -1/2$, $x = 1/4$, oltre all'estremo $x = 1$. Si ottiene

$$\sum_i \left| L_i\left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_i \left| L_i\left(\frac{1}{4}\right) \right| = \frac{1}{24} + \frac{5}{8} + \frac{5}{12} = \frac{13}{12}$$

$$\sum_i |L_i(1)| = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} = 5.$$

La costante di Lebesgue relativa ai dati considerati é quindi $\Lambda_2 = 5$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 10.04.08

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di eliminazione di Gauss e la fattorizzazione di Doolittle (in questo secondo caso, senza pivotazione) (3+3 punti);

b) dimostrare che il fattore triangolare inferiore L é formato dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari e costruirne le relative matrici di iterazione (5 punti);

b) supponendo di applicare il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \beta(Ax_k - b)$$

al sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

determinare un intervallo di valori di β per il quale il metodo sia convergente e calcolare in funzione di β la costante di contrazione in una norma a scelta (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti).

Supponendo di sostituire nel metodo delle corde il rapporto incrementale con il valore $f'(x_0)$, ottenendo quindi lo schema

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

b) dimostrare che il metodo é localmente convergente e determinarne un intorno di convergenza sotto l'ipotesi che f'' sia limitata (5 punti);

c) applicare questo metodo alla soluzione dell'equazione

$$2\sin x - x = 0$$

intorno alla prima radice strettamente positiva, scegliendo opportunamente il punto x_0 (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Il metodo proposto si puó riscrivere come

$$x_{k+1} = (I + \beta A)x_k - \beta b$$

e la matrice di iterazione é chiaramente $B = I + \beta A$. Con il sistema lineare in questione, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1+2\beta & \beta \\ \beta & 1+2\beta \end{pmatrix}$$

Lavorando nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (ma poiché la matrice B é simmetrica, scegliendo la norma $\|\cdot\|_1$ si otterrebbe lo stesso risultato), la condizione di contrattivitá é

$$\|B\|_\infty = |1 + 2\beta| + |\beta| < 1$$

che é soddisfatta per $\beta \in (-2/3, 0)$. Piú in generale, il metodo é convergente se e solo se $\rho(B) < 1$ (e questa coincide anche con la condizione di contrattivitá in norma euclidea). In questo caso, poiché i due autovalori di A sono $\lambda_1(A) = 1$, $\lambda_2(A) = 3$, e di conseguenza gli autovalori di $B = I + \beta A$ valgono $\lambda_1(B) = 1 + \beta$, $\lambda_2(B) = 1 + 3\beta$, si ottiene di nuovo la condizione (necessaria e sufficiente) $\beta \in (-2/3, 0)$.

Esercizio 3.

b) Si ha:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

da cui si ottiene anche

$$|g'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| = \frac{|f'(x_0) - f'(x)|}{|f'(x_0)|}.$$

Supponendo che $|f''(x)| \le M$, e indicando con U un intorno di $\bar{x}$ contenente anche x_0 si ha, per ogni $x \in U$:

$$|g'(x)| = \frac{|f'(x_0) - f'(x)|}{|f'(x_0)|} \le \frac{M\,|U|}{|f'(x_0)|},$$

e la condizione che caratterizza l'intorno di convergenza del metodo é

$$\frac{M\,|U|}{|f'(x_0)|} \le 1.$$

c) Come é facile verificare, esiste un'unica radice strettamente positiva, situata nell'intervallo $[\pi/2, \pi]$. Ponendo ad esempio $x_0 = \pi/2$, si ha $f'(x_0) = -1$, e quindi l'iterazione

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k) = x_k + 2\sin x_k - x_k = 2\sin x_k,$$

che é nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ con $g(x) = 2\sin x$. La condizione di contrattivitá dell'iterazione, $|g'(x)| < 1$, é soddisfatta per $x \in (\pi/3, 2\pi/3)$, intervallo che contiene sia la radice che il punto iniziale x_0.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 29.05.08

Esercizio 1.

a) Descrivere e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore, dimostrando inoltre l'unicitá del polinomio interpolatore (5+3 punti);

b) data la tabella (relativa alla funzione $f(x) = \log x$):

x	$f(x)$
1.0	0.0
1.5	0.405
2.0	0.693
3.0	1.099
4.5	1.504

costruire la tavola delle differenze divise (con tre decimali, e segnalando la perdita di cifre significative per sottrazione) ed il polinomio di Newton di grado $n = 4$ (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per Errore Quadratico Minimo (4 punti).

Data la tabella di punti

x_i	y_i
-1.0	0.154
-1.0	0.392
-0.5	0.188
0.0	-1.055
0.2	-0.788
0.3	-0.395
1.0	-1.253

b) calcolare la retta di Errore Quadratico Minimo associata alla tabella (5 punti);

c) supponendo di approssimare l'integrale di questa funzione mediante integrazione del polinomio approssimante di primo grado ottenuto, calcolare l'integrale approssimato su $[-1, 1]$ nel caso specifico della tabella precedente, e dare la forma generale di questa integrazione approssimata per una tabella generica di punti (x_i, y_i), sempre sull'intervallo $[-1, 1]$ (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di integrazione approssimata di Newton–Cotes e dimostrare la convergenza delle formule composite (2+6 punti);

b) calcolare i pesi della formula di Simpson e darne la versione composita su una griglia di punti equidistanti $x_0, \ldots, x_n$ (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Supponendo di ordinare i punti come appaiono nella tabella, si ha

$$f[x_0,x_1]=0.81, \quad f[x_1,x_2]=0.576, \quad f[x_2,x_3]=0.406, \quad f[x_3,x_4]=0.27,$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=-0.234, \quad f[x_1,x_2,x_3]=-0.113, \quad f[x_2,x_3,x_4]=-0.054(*),$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=0.061(*), \quad f[x_1,x_2,x_3,x_4]=0.02(*),$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=0.012(*)$$

(i calcoli sono stati effettuati con tre cifre decimali e segnalando con l'asterisco la perdita di una cifra significativa). La forma risultante per il polinomio di Newton é:

$$\Pi_4(x)=0.81\,(x-1)-0.234\,(x-1)(x-1.5)+0.061\,(x-1)(x-1.5)(x-2)+$$

$$+0.012\,(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-3)$$

Esercizio 2.

b) Scritta la retta nella forma $y=ax+b$, il sistema delle equazioni normali é dato da

$$\begin{cases} 3.38\,a-b=-2.169 \\ -a+7\,b=-2.757 \end{cases}$$

ed ha soluzione $a=-0.792$, $b=-0.507$.

c) Poiché

$$\int_{-1}^{1}(ax+b)dx=2b,$$

si ha, nel caso specifico della tabella, che l'integrale approssimato vale $I_1(f,-1,1)=-1.014$. Nel caso generale, si tratta di sostituire al valore specifico di b quello che risulta dalla soluzione del sistema delle equazioni normali. Si ottiene quindi, a conti fatti:

$$I_1(f,-1,1)=2b=2\frac{\sum_i x_i^2\cdot\sum_i y_i-\sum_i x_i\cdot\sum_i x_iy_i}{m\,\sum_i x_i^2-\left(\sum_i x_i\right)^2}.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 09.06.08

Esercizio 1.

a) Illustrare i principali metodi, sia diretti che iterativi, per la soluzione di sistemi lineari con matrice definita positiva e confrontarli in termini di complessitá ed occupazione di memoria (5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

trasformarlo in un sistema equivalente, ma dotato di una matrice simmetrica e definita positiva, e calcolare in numero di condizionamento (in una norma a piacere) in entrambi i casi (1+4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di equazioni scalari, e le sue principali varianti (3 punti);

b) scrivere esplicitamente il metodo per l'equazione

$$\log x - x^2 + 10 = 0$$

e trovarne una regione di convergenza monotona per ognuna delle radici (1+4 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore basandosi sulla forma di Lagrange (5 punti);

b) descrivere la strategia di interpolazione composita, enunciando e dimostrando la maggiorazione dell'errore per questo caso (2+4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare una maggiorazione esplicita di errore (se possibile, ottimale) per la formula dei trapezi composita (4 punti);

b) utilizzare questa formula di quadratura per approssimare l'integrale

$$\int_0^{10} xe^{-x} dx,$$

suddividendo l'intervallo di integrazione in 5 sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si tratta ovviamente di riscrivere in sistema $Ax = b$ come $A^tAx = A^tb$, ovvero, nel caso in questione:

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 = 11. \end{cases}$$

Come si calcola facilmente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix},$$

ed i rispettivi numeri di condizionamento (ad esempio, nella norma $\| \cdot \|_\infty$) valgono quindi

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 4 = 20,$$
$$K_\infty((A^tA)^{-1}) = \|A^tA\|_\infty \|(A^tA)^{-1}\|_\infty = 17 \cdot 17 = 289.$$

Come si vede, la simmetrizzazione del sistema comporta un aumento notevole del numero di condizionamento.

Esercizio 2.

b) Come é facile verificare, la funzione $f(x) = \log x - x^2 + 10$ é concava su tutto il suo dominio, ed inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Poiché, come ad esempio si vede calcolando $f(1) = 9 > 0$, la funzione ammette un massimo positivo, vi sono effettivamente due radici e la funzione é crescente e concava nella prima radice, decrescente e concava nella seconda. Le approssimazioni iniziali vanno quindi prese a sinistra della prima radice e a destra della seconda (entrambe, quindi, in punti in cui la funzione é negativa).

Esercizio 4.

a) Essendo la formula dei trapezi (che supporremo implementata a nodi equidistanti) costruita con una interpolazione di primo grado, in ogni singolo sottointervallo vale la stima

$$|f(x) - \Pi_1(x)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{2} |\omega_1(x)|.$$

Passando ad integrare l'errore di interpolazione, si ha, riferendosi convenzionalmente all'intervallo $[0, h]$:

$$\int_0^h |f(x) - \Pi_1(x)| dx \le \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_0^h |\omega_1(x)| dx = \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_0^h x(h-x) dx = \frac{\|f''\|_\infty h^3}{12}.$$

Tenendo conto che questa stima va moltiplicata per un numero di sottointervalli pari a $m = (b-a)/h$, otteniamo infine

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{1,m}(f, a, b) \right| \le \frac{(b-a)\|f''\|_\infty h^2}{12}.$$

b) Si ha, con sei decimali, $I_{1,5}(f, 0, 10) = 0.723433$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 07.07.08

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari $Ax = b$ enunciandone i relativi risultati di convergenza, e dimostrare quello relativo al metodo di Jacobi (3+5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

dire se é possibile applicare il metodo di Jacobi in modo che sia contrattivo, in norma $\|\cdot\|_\infty$ o in norma $\|\cdot\|_1$ (3 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza per i metodi iterativi del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle approssimazioni per interpolazione in una base generica (6 punti);

b) analizzare la sensibilitá dell'operazione di interpolazione rispetto alle perturbazioni sui valori di $f(x_i)$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle quadrature di Gauss–Legendre (6 punti);

b) Utilizzare una quadratura di Gauss–Legendre a quattro nodi per approssimare l'integrale

$$\int_0^4 x^2 e^{-x} dx$$

(3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si effettua preventivamente uno scambio tra le prime due righe in modo da portare gli elementi piú grandi sulla diagonale. Scritto il metodo di Jacobi per questo sistema, la marice di iterazione risulta essere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -3/4 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale $\|B\|_\infty = 5/4$, $\|B\|_1 = 1$. Il metodo non é quindi contrattivo nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (cosa che si poteva anche dedurre dal fatto che A non puó essere resa a diagonale dominante), mentre é al limite nella norma $\|\cdot\|_1$.

Esercizio 4.

b) I nodi ed i pesi, calcolati con sei decimali e riportati all'intervallo $[0, 4]$, valgono

$$x_0 = 0.277728, \quad x_1 = 1.320038, \quad x_2 = 2.679962, \quad x_3 = 3.722272,$$

$$\alpha_0 = 0.69571, \quad \alpha_1 = 1.30429, \quad \alpha_2 = 1.30429, \quad \alpha_3 = 0.69571,$$

ed il valore corrispondente fornito dalla quadratura di Gauss–Legendre, sempre con sei decimali, é $I_3 = 1.523121$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 25.09.08

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di Gauss per la soluzione di sistemi lineari $Ax = b$ e le due principali strategie di pivotazione (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il risultato di sensibilitá di un sistema lineare rispetto alle perturbazioni δb del suo termine noto (5 punti).

Esercizio 2.

a) Scrivere il metodo di Newton per l'equazione

$$\sin x = e^{-x}$$

specificando se é possibile trovare un intorno di convergenza monotona per la soluzione di modulo minore (4 punti);

b) basandosi sulla definizione di schema di secondo ordine, e supponendo che $|x_0 - \bar{x}| \leq 0.2$, dire in quante iterazioni l'errore scende sotto la precisione di macchina in aritmetica a precisione semplice (5 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) dimostrare che, dati m valori y_i $(i = 1, \ldots, m)$, la loro media aritmetica

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_i y_i$$

minimizza lo scarto quadratico

$$r(\bar{y}) = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

(4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle formule di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^{10} \sin x \, e^{-x} dx$$

con le formule composite dei trapezi e di Simpson, dividendo l'intervallo di integrazione in 5 sottointervalli (2+2 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

a) Scritta l'equazione nella forma $f(x) = \sin x - e^{-x} = 0$, il metodo di Newton ha la forma
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k - e^{-x_k}}{\cos x_k + e^{-x_k}}.$$
La radice di modulo minore é localizzata nell'intervallo $[0, \pi/2]$ in cui $\sin x$ é crescente e concava, mentre e^{-x} é decrescente e convessa. La loro differenza $f(x)$ é quindi crescente e concava, e per ottenere convergenza monotona basta scegliere x_0 a sinistra della radice (ad esempio, $x_0 = 0$).

b) Per un metodo a convergenza quadratica si ha
$$|x_{k+1} - \bar{x}| \le \frac{1}{2} \max |g''(x)|\, |x_k - \bar{x}|^2$$
dove il max é calcolato in un intorno della soluzione $\bar{x}$.

Esercizio 3.

b) Si sviluppa l'espressione dello scarto quadratico, ottenendo
$$r(\bar{y}) = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i y_i^2 - 2\bar{y} \sum_i y_i + m\bar{y}^2,$$
in cui l'ultimo termine corrisponde alla sommatoria $\sum_i \bar{y}^2$. Derivando rispetto a $\bar{y}$ si ha
$$r'(\bar{y}) = 2m\bar{y} - 2 \sum_i y_i,$$
ed uguagliando questa derivata a zero si ottiene l'espressione della media aritmetica (che é l'unico punto di minimo).

Esercizio 4.

b) Con sei decimali si ha, rispettivamente, $I_{1,5}(f, 0, 10) = 0.217651$ e $I_{2,5}(f, 0, 10) = 0.486917$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 16.02.09

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss e le principali strategie di pivotazione (4 punti);

b) Dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2. Descrivere il metodo delle corde ed individuare un intervallo opportuno per applicarlo al calcolo della radice di modulo massimo dell'equazione

$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

(2+4 punti).

Esercizio 3. Descrivere e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti).

Esercizio 4. Considerato un polinomio di Hermite di grado 3 sull'intervallo $[0, 1]$ nella forma

$$H_3(x) = f(0)L_{00}(x) + f'(0)L_{01}(x) + f(1)L_{10}(x) + f'(1)L_{11}(x)$$

a) enunciare le condizioni che definiscono le funzioni di base L_{ij}, e calcolare esplicitamente la forma di tali funzioni (2+4 punti);

b) derivare dal punto precedente una formula di quadratura nella forma

$$I_3(f; 0, 1) = w_{00}f(0) + w_{01}f'(0) + w_{10}f(1) + w_{11}f'(1)$$

(4 punti);

c) scrivere la espressione dell'errore di approssimazione e derivarne una stima il piú esplicita possibile per l'errore di quadratura (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2. Si puó tentare con un intervallo $[a, b]$ che oltre a contenere la radice porti a valori noti del seno, ad esempio

$$a = \frac{4}{3\pi}, \quad b = \frac{4}{5\pi}.$$

Con questa scelta si ha

$$b - a = \frac{8}{15\pi}, \quad f(b) - f(a) = \sqrt{2},$$

ed il metodo delle corde ha la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4\sqrt{2}}{15\pi} \sin \frac{1}{x_k}.$$

La relativa condizione di convergenza é

$$L_g = \max_{[a,b]} |g'(x)| = \max_{[a,b]} \left| 1 + \frac{4\sqrt{2}}{15\pi} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right| < 1.$$

D'altra parte, nell'intervallo $[a, b]$ si ha

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1,$$

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui, tenendo conto che i due termini hanno segno costante e prendendo i rispettivi estremi del valore assoluto,

$$-1 \leq \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \leq -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Utilizzando questa limitazione si ottiene infine, per ogni $x \in [a, b]$,

$$1 - \frac{4\sqrt{2}}{15\pi} \leq 1 + \frac{4\sqrt{2}}{15\pi} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \leq 1 - \frac{2}{15\pi}.$$

Il metodo é quindi convergente con questa scelta dell'intervallo $[a, b]$.

Esercizio 4.

b) Si ha ovviamente, per $i, j \in \{0, 1\}$:

$$w_{ij} = \int_0^1 L_{ij}(x)dx.$$

Tenendo conto delle relazioni di simmetria che intercorrono tra le funzioni di base L_{ij}, si ha anche $w_{00} = w_{10}$ e $w_{01} = -w_{11}$. Calcolando quindi due dei quattro integrali, si ottiene:

$$w_{10} = \int_0^1 (x^3 - x^2)dx = \frac{1}{2} = w_{00}$$

$$w_{11} = \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2)dx = -\frac{1}{12} = -w_{01}.$$

Si poteva evitare il calcolo del primo integrale in base alle stesse considerazioni fatte a proposito dei pesi delle formule interpolatorie, e della necessitá di integrare esattamente le costanti.

c) Applicando la formula generale dell'errore di approssimazione del polinomio di Hermite al caso in questione, si ha

$$|f(x) - H_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} x^2(x-1)^2$$

da cui, per la strada piú ovvia, si ottiene integrando la maggiorazione

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - I_3(f;0,1)\right| \le \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx =$$

$$= \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx = \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{720}.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.04.09

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss per un sistema lineare $Ax = b$ e dimostrare la possibilitá di fattorizzare (a meno di una opportuna permutazione di righe P) la matrice A nella forma LU (3+5 punti);

b) dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

costruire esplicitamente le matrici L, U, P nel corso del MEG (4 punti).

Esercizio 2.

a) Dato un metodo iterativo generico nella forma $x_{k+1} = T(x_k)$, e denotandone con $L_T < 1$ la costante di contrazione, maggiorare l'errore della iterazione k–esima nel caso che siano noti (o stimabili) rispettivamente l'errore iniziale $\|x_0 - \bar{x}\|$ o l'aggiornamento $\|x_k - x_{k-1}\|$ (2+2 punti);

b) applicare il metodo di Jacobi al sistema lineare dell'esercizio precedente, riscrivendo le stime del punto *a*) con la costante di contrazione effettiva nella norma $\|\cdot\|_\infty$ (4 punti)

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza per i metodi iterativi nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) dato un metodo iterativo per l'equazione $f(x) = 0$, nella forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha f(x_k)^\beta$$

individuare delle scelte dei parametri α e β che permettano la convergenza del metodo in caso di una radice $\bar{x}$ doppia, ed applicare il metodo cosí ottenuto all'equazione

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin x = 0$$

intorno alla radice $\bar{x} = \pi/2$, indicando una scelta corretta dei parametri (possibilmente senza ricorrere alla conoscenza della radice) (4+4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Al primo passo, la pivotazione parziale richiede di scambiare la prima e la terza riga, cioé applicare la permutazione

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutando la matrice iniziale $A^{(1)}$ in questo modo si ha poi

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 28/5 & 41/5 \\ 0 & -16/5 & 8/5 \end{pmatrix}.$$

L'eliminazione della variabile x_2 non richiede invece di scambiare righe, si ha quindi $P_2 = I$ e la permutazione finale é

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre, effettuando l'unica combinazione lineare di righe necessaria, si ottiene

$$L = T_1^{-1} T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & -16/28 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 28/5 & 41/5 \\ 0 & 0 & 880/140 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

b) Per applicare il metodo di Jacobi le righe vanno preventivamente permutate in modo che la matrice del sistema sia a diagonale dominante, ottenendo quindi

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 12. \end{cases}$$

Il metodo di Jacobi si scrive quindi, per il sistema in questione:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -1/5\, x_2^{(k)} + 3/5\, x_3^{(k)} + 3/5 \\ x_2^{(k+1)} = 1/3\, x_1^{(k)} + 1/3\, x_3^{(k)} + 1/3 \\ x_3^{(k+1)} = 3/10\, x_1^{(k)} - 1/2\, x_2^{(k)} + 6/5 \end{cases}$$

e la matrice di iterazione ha quindi norma $\|B\|_\infty = \max(4/5, 2/3, 4/5) = 4/5$. Le maggiorazioni dell'errore per il metodo alla iterazione k–esima sono quindi:

$$\|x_k - \bar{x}\|_\infty \le \|B\|_\infty^k \, \|x_0 - \bar{x}\| = \left(\frac{4}{5}\right)^k \|x_0 - \bar{x}\|,$$

$$\|x_k - \bar{x}\|_\infty \le \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x_k - x_{k-1}\| = 4\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Esercizio 3.

b) Posto

$$g(x) = x + \alpha f(x)^\beta$$

si ha anche

$$g'(x) = 1 + \alpha f(x)^{\beta-1} f'(x).$$

Effettuando ora lo sviluppo di Taylor sia di f che f' con punto iniziale $\bar{x}$, e tenendo conto che la radice é doppia, si ha:

$$g'(x) = 1 + \alpha \left(\frac{1}{2} f''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 (1 + o(1))\right)^{\beta-1} (f''(\bar{x})(x - \bar{x})(1 + o(1))) =$$

$$= 1 + \alpha \left[\frac{1}{2} f''(\bar{x})^{\beta-1} f''(\bar{x})(x - \bar{x})^{2\beta-1}\right] (1 + o(1)).$$

Perché il metodo converga, é per prima cosa necessario che il termine tra parentesi quadre non si annulli in $\bar{x}$, cosa che porta alla scelta $\beta = 1/2$. A questo punto si ha:

$$g'(x) = 1 + \alpha \left[\frac{1}{2} f''(\bar{x})^{1/2}\right] (1 + o(1))$$

e la scelta piú "naturale" per α, ammesso di conoscere $\bar{x}$, sarebbe

$$\alpha = -\frac{2}{f''(\bar{x})^{1/2}}$$

(cosa che porterebbe alla convergenza quadratica del metodo). In pratica, come sempre, basta che la costante α sia una approssimazione abbastanza buona di questo valore.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 05.06.09

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) supponendo di interpolare la funzione $f(x) = \sin 2x$ con sei nodi equidistanti a distanza h, maggiorare l'errore di interpolazione nell'intervallo compreso tra i due nodi centrali (4 punti).

Esercizio 2. Dati due nodi simmetrici $x_0 = -a$ e $x_2 = a$ nell'intervallo $[-1, 1]$,

a) calcolare la norma $\|\omega_1\|_\infty$ del polinomio $\omega_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ se $a = 1$ (2 punti);

b) calcolare la norma $\|\omega_1\|_\infty$ nel caso tale norma venga minimizzata, ovvero se i due nodi sono nodi di Chebyshev–Gauss (3 punti);

c) scegliere a in modo da massimizzare il grado di precisione di una formula di quadratura construita sui due nodi considerati, e calcolare la norma $\|\omega_1\|_\infty$ per questa scelta di a (4 punti);

d) scrivere le tre formule di quadratura corrispondenti a queste scelte dei nodi (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti);

b) enunciare i principali risultati relativi alle formule di Gauss–Legendre e dimostrare il teorema di positivitá dei pesi (5 punti);

c) approssimare l'integrale

$$\int_0^2 e^{-x} dx$$

con le formule di quadratura ottenute nell'esercizio precedente (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Come al solito, per semplificare i calcoli, si puó considerare una disposizione dei nodi simmetrica rispetto all'origine, in modo quindi che

$$x_0 = -x_5 = -\frac{5}{2}h, \quad x_1 = -x_4 = -\frac{3}{2}h, \quad x_3 = -x_3 = -\frac{h}{2},$$

ed il polinomio $\omega_5(x)$ assume la forma

$$\omega_5(x) = \left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9h^2}{4}\right)\left(x^2 - \frac{25h^2}{4}\right).$$

Per motivi di simmetria, il massimo modulo nell'intervallo $[x_2, x_3]$ si ha nell'origine, e piú precisamente

$$\max_{[x_2,x_3]} |\omega_5(x)| = |\omega_5(0)| = \frac{225}{64}h^6.$$

Applicando questa maggiorazione nella formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione, si ottiene quindi

$$\max_{[x_2,x_3]} |f(x) - \Pi_5(x)| \leq \frac{\|f^{(6)}\|_\infty}{6!} \max_{[x_2,x_3]} |\omega_5(x)| = \frac{225\|f^{(6)}\|_\infty}{64 \cdot 720}h^6 \approx$$

$$\approx 0.005\, \|f^{(6)}\|_\infty\, h^6$$

Esercizio 2.

a) Si ha ovviamente $\omega_1(x) = x^2 - 1$, e quindi, essendoci il solo estremo interno $x = 0$, si ha anche $\|\omega_1\|_\infty = 1$.

b) Nel caso $a \neq 1$, si ha $\omega_1(x) = x^2 - a^2$. L'unico estremo interno resta $x = 0$, ma per il calcolo della norma va considerato anche il valore in $x = \pm 1$, ovvero

$$\|\omega_1\|_\infty = \max(|\omega_1(0)|, |\omega_1(\pm 1)|) = \max(a^2, 1 - a^2).$$

Seguendo lo stesso ragionamento fatto nell'esercizio 2.*b* del 29.09.99, la scelta che fornisce la norma minima si ha quando i due argomenti coincidono, cioé quando

$$2a^2 - 1 = 0$$

cosa che porta alla scelta dei nodi (di Chebyshev–Gauss) $a = 1/\sqrt{2}$, a cui corrisponde il valore $\|\omega_1\|_\infty = 1/2$.

c) Dato per buono che, per simmetria e per integrare esattamente le costanti, i due pesi valgano $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, l'unica condizione che resta possibile imporre é che sia integrata esattamente la funzione $f(x) = x^2$. Poiché

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$I_1(x^2; -1, 1) = 2a^2,$$

si ottiene la condizione $a = 1/\sqrt{3}$, che corrisponde alla formula di Gauss–Legendre a due nodi e consente di integrare correttamente polinomi fino al grado $\nu = 3$. Con questa scelta si ha

$$\|\omega_1\|_\infty = \max(a^2, 1 - a^2) = \max\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

d) In tutti i tre casi i pesi valgono $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, si ha quindi

$$I_1(f; -1, 1) = f(-a) + f(a)$$

con il valore specifico di a corrispondente alla quadratura scelta.

Esercizio 3.

c) Si ha, con sei decimali:

$$I_1(e^{-x}; 0, 2) = \begin{cases} 1.135335 & \text{se } a = 1; \\ 0.927492 & \text{se } a = 1/\sqrt{2}; \\ 0.86183 & \text{se } a = 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

(il vaore esatto é 0.864665, sempre con sei decimali).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 15.06.09

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione di Doolittle in assenza di pivotazione, e derivarne la fattorizzazione di Cholesky (4+2 punti);

b) discutere l'eventuale vantaggio in termini di complessitá nell'uso di tali algoritmi per la soluzione di un sistema lineare (2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti).

b) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo delle corde all'equazione

$$\sin x = \frac{1}{4}$$

nell'intorno della prima radice positiva, prendendo gli estremi a e b esclusivamente in punti in cui é noto esplicitamente il valore del seno, e calcolare la costante di contrazione del metodo. Calcolare inoltre il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore pari ad un millesimo dell'errore iniziale (3+2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare l'esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore basandosi sulla forma di Lagrange (5 punti);

b) definire la costante di Lebesgue Λ_n associata ad un intervallo I e ad un certo insieme di nodi $x_0, \ldots, x_n$, e calcolarla per la scelta $I = [-1, 1]$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$ (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle quadrature di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) Utilizzare una quadratura di Simpson composita su due sottointervalli per approssimare l'integrale

$$\int_0^4 x^2 e^{-x} dx$$

(3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Ovviamente l'equazione va preventivamente riscritta come

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{4} = 0.$$

Per applicare il metodo delle corde, si puó tentare ad esempio di utilizzare i punti $a = 0$ e $b = \pi/6$, in cui il valore della funzione é rispettivamente $f(a) = -1/4$, e $f(b) = 1/4$. Il metodo delle corde assume con questa scelta la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\pi}{3}\left(\sin x_k - \frac{1}{4}\right) = g(x_k).$$

Per calcolare la costante di contrazione, si deriva la funzione di iterazione g ottenendo

$$g'(x) = 1 - \frac{\pi}{3}\cos x.$$

Poiché la funzione $\cos x$ é monotona nell'intervallo $[a, b]$ anche g' lo é, e quindi per calcolare il suo massimo modulo L_g basta considerare gli estremi, ovvero

$$L_g = \max(|g'(0)|, |g'(\pi/6)|) = \max\left(\left|1 - \frac{\pi}{3}\right|, \left|1 - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right) \approx 9.31 \cdot 10^{-2}.$$

Trattandosi di un valore di poco inferiore a 10^{-1}, la precisione richiesta si otterrá dopo tre iterazioni.

Esercizio 3.

b) Per un qualche misterioso motivo, i dati di questo esercizio (e, di conseguenza, la sua correzione) coincidono totalmente con quelli dell'esercizio 3.*b* del 04.02.08.

Esercizio 4.

b) Con sei decimali, $I_{2,2}(f, 0, 4) = 1.546528$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 16.07.09

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per sistemi lineari enunciandone i relativi risultati di convergenza, e dimostrare quello relativo al metodo di Jacobi (3+5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 10x_3 = -3 \end{cases}$$

dire se il metodo di Jacobi puó essere applicato, ed in caso affermativo calcolarne la costante di contrazione nelle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti).

b) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione

$$e^{-x} \sin x = 0$$

nell'intorno della prima radice positiva, e calcolare il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore pari ad un milionesimo dell'errore iniziale (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti);

b) supponendo di interpolare la funzione $f(x) = \text{sign}(x)$ mediante nodi equispaziati con passo Δx, dimostrare che se $0 \in [\min(x_0, \ldots, x_k), \max(x_0, \ldots, x_k)]$, allora

$$f[x_0, \ldots, x_k] = O(\Delta x^{-k})$$

(4 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la costruzione delle quadrature di Newton–Cotes semplici e composite ed enunciarne i principali risultati teorici (4 punti);

b) costruire la formula di quadratura di Simpson (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice del sistema diviene a diagonale dominante una volta scambiate le prime due righe. Con questo scambio, il metodo di Jacobi é convergente e piú precisamente la matrice di iterazione é data da

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 0 & -3/5 \\ -1/2 & 1/10 & 0 \end{pmatrix},$$

per la quale si ha $\|B_J\|_1 = 14/15$ e $\|B_J\|_\infty = 4/5$.

Esercizio 2.

b) Ovviamente va bene ogni intervallo che includa il punto π. Tenendo conto che $2^{10} \approx 10^3$, si ha $(1/2)^{20} \approx 10^{-6}$ e la precisione richiesta si ottiene dopo 20 iterazioni.

Esercizio 3.

b) Notiamo intanto che, se i nodi sono numerati in modo consecutivo e le differenze divise vengono effettuate tra nodi consecutivi, tutte le differenze divise di ordine 1 sono nulle meno quella relativa alla coppia di nodi x_l, x_m adiacenti all'origine, per la quale si ha

$$f[x_l, x_m] = \frac{2}{\Delta x}.$$

Per le differenze di secondo ordine tra nodi consecutivi, applicando la definizione occorre effettuare una ulteriore divisione per $2\Delta x$. Ne deriva quindi che tutte quelle in cui compare la differenza $f[x_l, x_m]$ saranno $O(\Delta x^{-2})$, mentre le altre saranno nulle. Proseguendo in questo modo si ha che le differenze di ordine generico j soddisferanno la condizione di essere $O(\Delta x^{-j})$ a patto che i nodi x_l e x_m siano compresi tra gli argomenti. Ma questo accade sicuramente per la differenza di ordine massimo k.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 18.09.09

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss con le principali strategie di pivotazione, e calcolarne la complessitá (4+2 punti);

b) descrivere l'algoritmo di fattorizzazione di Doolittle in assenza di pivotazione (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di equazioni scalari, e le sue principali varianti (3 punti);

b) applicare il metodo di Steffensen all'equazione

$$x^2 - a = 0$$

in modo che il calcolo di una iterazione abbia la minore complessitá possibile (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle interpolazioni in una base generica (6 punti);

b) definire la costante di Lebesgue e calcolarla nell'intervallo $[-1, 1]$ per una base di Lagrange di grado $n = 1$, prima nel caso in cui $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, e poi nel caso in cui $x_0 = -1/2$, $x_1 = 1/2$ (2+2 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^4 e^{-x}\sqrt{x}\,dx$$

applicando la formula di Gass–Legendre a tre nodi (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Scrivendo il metodo di Steffensen per l'equazione proposta, si ottiene

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^2 - a)^2}{(x_k + x_k^2 - a)^2 - x_k^2 + a}.$$

Svolgendo i quadrati ed effettuando la divisione tra i due polinomi a numeratore e denominatore, si arriva alla forma

$$x_{k+1} = x_k - 1 + \frac{2x_k}{x_k^2 + 2x_k - a}.$$

Volendo strafare, si puó risparmiare ancora una operazione mettendo il denominatore nella forma di Horner:

$$x_{k+1} = x_k - 1 + \frac{2x_k}{-a + x_k(2 + x_k)}.$$

Esercizio 3.

b) Nel primo caso si ha

$$L_0(x) = \frac{1-x}{2}, \quad L_1(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Nell'intervallo $[-1, 1]$ entrambe le funzioni sono positive, e quindi

$$\Lambda(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| = L_0(x) + L_1(x) \equiv 1.$$

Nel secondo caso, la base di Lagrange é data da

$$L_0(x) = \frac{1}{2} - x, \quad L_1(x) = x + \frac{1}{2}.$$

Nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$ vale lo stesso argomento del caso precedente, e si ottiene quindi $\Lambda(x) \equiv 1$, mentre all'esterno di questo intervallo una delle due funzioni di base é negativa. Ad esempio, per $x < -1/2$, si ha $L_1(x) < 0$, e perció

$$\Lambda(x) = |L_0(x)| + |L_1(x)| = L_0(x) - L_1(x) = -2x.$$

La funzione di Lebesgue é quindi

$$\Lambda(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < -1/2 \\ 1 & \text{se } -1/2 \le x \le 1/2 \\ 2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$

ed il suo massimo vale $\Lambda_1 = 2$.

Esercizio 4.

b) Con sei decimali, $I_2 = 0.875733$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 02.11.09

Esercizio 1.

a) Esporre la costruzione del metodo di Newton per sistemi di equazioni nonlineari, enunciando il relativo risultato di convergenza (3 punti).

Dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} y^2 - \cos^2 x = 0 \\ x - \sin y = 0 \end{cases}$$

b) scrivere il metodo di Newton per la sua soluzione, nella forma senza inversione di matrice (2 punti);

c) determinata una approssimazione iniziale sufficientemente vicina alla soluzione positiva, scrivere il metodo di Newton approssimato ottenuto calcolando la matrice Jacobiana sono in questo punto e verificare se é una contrazione nell'intorno della soluzione (2+5 punti);

d) individuare per il sistema una forma di punto fisso che non richieda il calcolo delle derivate e verificare che sia una contrazione intorno alla soluzione positiva (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di ricerca unidimensionale esatta per bisezione, mettendo in luce le ipotesi e la dinamica per cui ad ogni iterazione l'intervallo selezionato continua a contenere il punto di minimo (4 punti).

Data la funzione a variabili separate $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, si supponga di estendere a due dimensioni il metodo di bisezione effettuando il prodotto cartesiano di due suddivisioni unidimensionali e selezionando da questa griglia di punti ad ogni iterazione il punto di minimo piú gli otto punti circostanti.

b) Scrivere il metodo di bisezione bidimensionale corrispondente a questa strategia, in forma di diagramma di flusso o pseudocodice (4 punti);

c) spiegare perché ad ogni iterazione l'intervallo selezionato continua a contenere il punto di minimo se la $f(x_1, x_2)$ ha la struttura data, e perché questo puó non essere vero per una funzione di struttura generale (3+3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza n–passi dei metodi di Direzioni Coniugate applicati a funzioni quadratiche (6 punti);

b) esporre la costruzione del metodo del Gradiente Coniugato e le sue principali varianti per funzioni non quadratiche (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si ha, dopo aver calcolato la Jacobiana in (x_k, y_k):

$$\begin{pmatrix} 2\sin x_k \cos x_k & 2y_k \\ 1 & -\cos y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_k^2 - \cos^2 x_k \\ x_k - \sin y_k. \end{pmatrix}$$

c) Da un sommario studio grafico si vede che la soluzione é strettamente all'interno dell'intervallo $[0, 1]^2$. Una approssimazione iniziale per cui si ottengono calcoli relativamente semplici é $(x_0, y_0) = (\pi/4, \pi/4)$. La Jacobiana e la sua inversa valgono in questo punto

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & \pi/2 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad J_F(x_0, y_0)^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{2}+\pi} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\pi/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il metodo delle corde, con questa scelta, ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}+\pi} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\pi/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k^2 - \cos^2 x_k \\ x_k - \sin y_k \end{pmatrix}.$$

Non viene invece calcolata la costante di Lipschitz del secondo membro, che richiede un calcolo molto complesso.

d) Tenendo conto che ci si restringe al quadrante positivo, possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} x = \sin y \\ y = \cos x, \end{cases}$$

dove il secondo membro $T(x, y)$ ha una jacobiana data da

$$J_T(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi é possibile determinare un intorno della soluzione in cui entrambi i termini nonnulli di J_T (e quindi sia $\|J_T\|_1$ che $\|J_T\|_\infty$) sono minori di 1.

Esercizio 2.

c) In realtá, data la struttura della funzione, si potrebbe applicare la bisezione *prima su una variabile e poi sull'altra*, ottenendo comunque chiaramente il risultato corretto. Quindi, applicare l'algoritmo proposto porta ad effettuare sull'intervallo iniziale gli stessi dimezzamenti successivi che sarebbero effettuati appicando due bisezioni unidimensionali in sequenza. Nel caso invece di una funzione di struttura generale, non é piú vero ad esempio che, fissato un valore $\bar{x}_1$ per x_1, l'intervallo della variabile x_2 che contiene il $\min_{x_2} f(\bar{x}_1, x_2)$ sia lo stesso che contiene $\min_x f(x_1, x_2)$, che corrisponde in generale ad un altro valore della variabile x_1.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 13.01.10

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di penalizzazione per problemi di minimizzazione vincolata (2 punti);

b) enunciarne e dimostrarne il risultato di convergenza (6 punti);

c) scrivere la formulazione penalizzata del problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = -x_1,$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}$$

(2 punti);

d) calcolare il condizionamento della matrice Hessiana della funzione penalizzata nel punto di minimo, in funzione del parametro di penalizzazione (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la struttura generale dei metodi di Runge–Kutta espliciti fornendo un esempio di schema di questa classe (3 punti);

b) derivare le condizioni di consistenza per gli schemi di ordine 2 (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere struttura e caratteristiche generali degli schemi multistep lineari (3 punti);

b) enunciare la condizione delle radici (3 punti).

Dato uno schema multistep nella forma

$$u_{k+1} = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + h\Big[b_0 f(x_k, u_k) + b_1 f(x_{k-1}, u_{k-1})\Big], \tag{$*$}$$

c) derivare la condizione di consistenza di ordine 2 (4 punti);

d) fornire un esempio di schema nella forma $(*)$ che sia consistente con ordine 2 e verificare se soddisfa la condizione delle radici (2+3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

$c)$ La funzione penalizzata puó essere definita in modo standard come

$$f_\varepsilon(x) = -x_1 + \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + 2x_2^2 - 1)^2.$$

$d)$ Le condizioni di stazionarietá sono quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_1} = -1 + \frac{4}{\varepsilon}(x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_1) = 0 \\ \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_2} = \frac{8}{\varepsilon}(x_1^2x_2 + 2x_2^3 - x_2) = 0 \end{cases}$$

e trattandosi di un sistema di terzo grado, non é possibile trovare espicitamente una soluzione (a parte la ovvia condizione $x_2 = 0$). Per dare un ordine di grandezza del condizionamento della Hessiana, si potrebbe provare a calcolarla invece nel punto di minimo del problema esatto, che é in $(1, 0)$. La matrice Hessiana é data da

$$H_{f_\varepsilon}(x_1, x_2) = \frac{4}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_2^2 - 1 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 + 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$$

e calcolandola nel minimo si ottiene

$$H_{f_\varepsilon}(1, 0) = \frac{4}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trattandosi di una matrice singolare, il suo numero di condizionamento é infinito. Nel punto di minimo del problema penalizzato, la derivata parziale seconda fatta due volte rispetto a x_2 sarebbe stata invece nonnulla, e la matrice Hessiana sarebbe risultata diagonale. D'altra parte, la differenza tra il minimo vincolato esatto x^* e quello penalizzato x_ε^* (si veda ad esempio l'esercizio 2.c del 04.06.99) ha ordine

$$\|x^* - x_\varepsilon^*\| = O(\varepsilon).$$

Nel minimo penalizzato si ha quindi

$$H_{f_\varepsilon}(x_\varepsilon^*) = \frac{4}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 2 + O(\varepsilon) & 0 \\ 0 & O(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\varepsilon} + O(1) & 0 \\ 0 & O(1) \end{pmatrix},$$

e dato che la matrice é diagonale, il numero di condizionamento coincide con il rapporto tra gli autovalori, da cui $K(H_{f_\varepsilon}) = O(1/\varepsilon)$.

Esercizio 3.

c) Occorre sostituire i valori u_j e $f(x_j, u_j)$ con opportuni sviluppi di Taylor della soluzione. Posto:

$$f(x_k, u_k) = y'(x_k),$$

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + O(h^3),$$

$$f(x_{k-1}, u_{k-1}) = y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + O(h^2).$$

Effettuando la verifica di consistenza, si ottiene

$$y(x_{k+1}) = a_0 y(x_k) + a_1[y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k)] + h[(b_0+b_1)y'(x_k) + hb_1 y''(x_k)] + O(h^3).$$

Il secondo membro coincide con il corretto sviluppo di $y(x_{k+1})$ sotto le condizioni:

$$a_0 + a_1 = 1,$$

$$b_0 + b_1 - a_1 = 1,$$

$$a_1 - 2b_1 = 1.$$

d) Ad esempio, il metodo midpoint a due passi, per il quale la condizione delle radici fornisce i due valori $\zeta = \pm 1$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 18.01.10

Esercizio 1.

a) Descrivere la filosofia generale dei metodi Quasi–Newton ed enunciare i principali risultati di convergenza (4 punti);

b) costruire la formula di aggiornamento di rango 1 (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di ricerca parziale di Armijo–Goldstein e verificare che soddisfa le condizioni di convergenza (2+5 punti);

b) scriverne l'algoritmo in forma di diagramma di flusso o pseudocodice (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo di Uzawa per problemi di minimizzazione vincolata (3 punti);

b) dato il problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = x^2 + x \quad ; \qquad S = [0, +\infty)$$

scegliere un passo per applicare il metodo di Uzawa ed effettuarne tre iterazioni complete a partire dal punto iniziale $\lambda_0 = 1$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per gli schemi ad un passo, impliciti ed espliciti (7 punti);

b) verificare l'ipotesi di lipschitzianitá per gli schemi di Runge–Kutta del secondo ordine (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 3.

b) Scritto il vincolo di disuguaglianza come

$$g(x) = -x \leq 0,$$

e definita la funzione Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = x^2 + x - \lambda x,$$

scegliamo ad esempio il passo $\beta = 0.1$. Partendo da $\lambda_0 = 1$, si ha

$$x_0 = \text{argmin}\,(x^2 + x - \lambda_0 x) = \text{argmin}\, x^2 = 0,$$

alla iterazione successiva si ha:

$$\lambda_1 = P_{\mathbf{R}_+}[\lambda_0 + \beta g(x_0)] = P_{\mathbf{R}_+}[1 + 0.1 \cdot 0] = 1$$

e si osserva che il metodo si é giá stabilizzato sulla soluzione $x^* = 0$, $\lambda^* = 1$, che corrisponde al minimo vincolato.

Esercizio 4.

b) Si veda l'esercizio 2.*b* del 09.01.03.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 08.02.10

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi, diretti o iterativi, per la soluzione di sistemi lineari con matrice definita positiva (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti);

c) fornire un esempio (anche 2×2) di matrice simmetrica e definita positiva, ma non a diagonale dominante (2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti).

b) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo delle corde all'equazione

$$\sqrt{x} + 4 \sin x = 0$$

nell'intorno della prima radice positiva, e calcolare la costante di contrazione del metodo (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) considerando i due nodi $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$, maggiorare l'errore che si compie utilizzando questi nodi per interpolare (con grado $n = 1$) una funzione sull'intervallo $[0, 1]$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

b) Costruire la formula di quadratura che approssimi l'integrale

$$\int_0^1 f(t)dt$$

utilizzando i valori $f(-1)$, $f(0)$ (2 punti).

c) basandosi sulla maggiorazione ottenuta nel punto $3.b$, maggiorare a sua volta l'errore di quadratura (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) Ponendo ad esempio $a_{11} = 1$ e $a_{12} = a_{21} = 2$, la matrice é nella forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$$

in cui basta determinare x in modo che $|A| > 0$. Basta quindi che $x > 4$.

Esercizio 2.

b) Come si puó facilmente verificare, la prima radice positiva é nell'intervallo $(\pi, 4)$, per il quale (lavorando con quattro cifre decimali) si ha

$$f(\pi) = \sqrt{(\pi)} \approx 1.7725 > 0, \quad f(4) = 2 + 4 \sin 4 \approx -1.0272 < 0.$$

In corrispondenza di questo intervallo, il metodo delle corde si scrive

$$x_{k+1} = x_k + 0.3066 \cdot (\sqrt{x_k} + 4 \sin x_k).$$

Per calcolare la costante di contrazione L_g, si deriva g ottenendo

$$g'(x) = 1 + 0.3066 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4 \cos x \right).$$

Maggiorando e minorando ora i due termini della derivata di f sull'intervallo $[\pi, 4]$ si ottiene

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right] = [0.25, 0.2821], \quad 4 \cos x \in [-4, 4 \cos 4] = [-4, -2.6146],$$

per cui prendendo i rispettivi massimi e minimi per i due termini di f', si ottiene a fortiori

$$f'(x) \in [-3.75, -2.3325],$$

da cui, sempre sull'intervallo $[\pi, 4]$,

$$g'(x) \in [-0.1498, 0.2849]$$

ottenendo quindi per la costante di contrazione $L_g \leq 0.2849$.

Esercizio 3.

b) Il punto é ovviamente la stima di $\omega_1(x) = x(x+1)$, che sull'intervallo di interpolazione puó essere maggiorato come

$$\max_{[0,1]} |\omega_1(x)| = |\omega_1(1)| = 2,$$

da cui si ottiene la maggiorazione di errore, valida solo per $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{2\sup_{[-1,1]}|f''(x)|}{2} = \sup_{[-1,1]}|f''(x)|.$$

Esercizio 4.

b) I due pesi valgono

$$\alpha_0 = -\int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \int_0^1 (x+1)dx = \frac{3}{2}.$$

c) Banalmente, moltiplicando l'ampiezza dell'intervallo di integrazione per la maggiorazione uniforme dell'errore di interpolazione, si ottiene

$$|I_1(f;0,1) - I(f;0,1)| \leq \sup_{[-1,1]}|f''(x)|.$$

In modo piú preciso, visto che ω_1 ha sempre segno positivo nell'intervallo di integrazione, si puó stimare l'errore come

$$|I_1(f;0,1) - I(f;0,1)| \leq \frac{\sup_{[-1,1]}|f''(x)|}{2}\int_0^1 x(x+1)dx =$$

$$= \frac{5}{12}\sup_{[-1,1]}|f''(x)|.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 08.02.10

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) discutere la sua applicazione alle varie possibili strategie di scelta delle direzioni di ricerca (2 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di ricerca parziale di Wolfe–Powell e verificare che soddisfa le condizioni di convergenza (2+5 punti);

b) scriverne l'algoritmo in forma di diagramma di flusso o pseudocodice (3 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare che la condizione di lipschitzianitá implica la zero–stabilitá nei metodi ad un passo (5 punti);

b) verificare che il seguente metodo ad un passo:

$$u_{k+1} = u_k + f\left(\frac{u_k + u_{k+1}}{2}\right)$$

soddisfa la condizione di lipschitzianitá (3 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams (2 punti);

b) costruire il metodo di Adams–Bashforth a due passi (3 punti);

c) verificarne consistenza e zero–stabilitá (3+2 punti).

Soluzioni

Esercizio 3.
b) Indicando con u e v i due argomenti, si ha:

$$\Phi(u, v) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right),$$

da cui si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\|\Phi(u_1, v_1) - \Phi(u_2, v_2)\| &= \left\| f\left(\frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2}\right) - f\left(\frac{u_2}{2} + \frac{v_2}{2}\right)\right\| \leq \\ &\leq L_f \left\| \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} - \frac{u_2}{2} - \frac{v_2}{2} \right\| \leq \\ &\leq \frac{L_f}{2}(\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|).\end{aligned}$$

Esercizio 4.
b) Si veda l'esame del 12.09.05.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 12.04.10

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione LU e discuterne la convenienza dal punto di vista della complessitá, nella soluzione di sistemi lineari (4 punti);

b) Dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di Richardson per la soluzione di sistemi lineari con matrice definita positiva, e dimostrarne le condizioni di convergenza (2+4 punti).

Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

b) discutere la sua risolvibilitá mediante i metodi di Jacobi e di Richardson (2+2 punti);

c) con riferimento al metodo di Richardson, trovare il passo β che minimizza il raggio spettrale della matrice di iterazione (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) scrivere un metodo di Newton per calcolare la radice m–esima di un numero reale a (con m intero, $a > 0$ e senza richiedere il calcolo di radici), individuando se possibile un intorno di convergenza monotona (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Il sistema é chiaramente risolubile con entrambi i metodi, dato che la sua matrice é sia dominante diagonale che definita positiva.

c) Il calcolo degli autovalori della matrice A del sistema fornisce i due valori

$$\lambda_{1,2}(A) = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

da cui si ottengono per la matrice di iterazione B_R gli autovalori

$$\lambda_{1,2}(B_R) = 1 - \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\beta.$$

La minimizzazione del raggio spettrale di B_R equivale quindi a minimizzare rispetto a β la funzione

$$\max\left(\phi^+(\beta), \phi^-(\beta)\right),$$

in cui

$$\phi^+(\beta) = \left|1 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\beta\right|, \quad \phi^-(\beta) = \left|1 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\beta\right|.$$

La minimizazione del massimo di due funzioni si affronta in modo concettualmente equivalente a quello utilizzato per il calcolo dei nodi Chebyshev (esercizio 2.*b* del 29.09.99). Disegnate le due funzioni (che sono lineari a tratti) si vede che il minimo si ottiene nell'unico valore $\beta > 0$ tale che $\phi^+(\beta) = \phi^-(\beta)$, ovvero $\beta = 2/5$, che fornisce

$$\lambda_{1,2}(B_R) = \pm\frac{\sqrt{5}}{5},$$

e quindi anche $\rho(B_R) = \sqrt{5}/5$.

Esercizio 3.

b) Analogamente a quanto accade per la radice quadrata (si veda l'esercizio 1.*b* del 05.04.01), si puó riportare il calcolo della radice m–esima alla soluzione positiva dell'equazione

$$x^m - a = 0,$$

per la quale il metodo di Newton ha la forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^m - a}{mx_k^{m-1}} = \frac{m-1}{m}x_k + \frac{a}{mx_k^{m-1}}.$$

La funzione é crescente e convessa a destra della radice $\bar{x}$, e questo permette di avere convergenza monotona per $x_0 > \bar{x}$ (la approssimazione iniziale puó quindi essere scelta come nel caso della radice quadrata).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 01.06.10

Esercizio 1.

$a)$ Esporre la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo e la costruzione del sistema delle equazioni normali (4 punti);

$b)$ data la seguente tabella di temperature rilevate in funzione dell'ora:

x	$T(x)$
3	10.1
6	10.3
9	14.8
12	16.6
15	16.3
18	14.2
21	12.1
24	11.0

scrivere il sistema delle equazioni normali associato alla loro approssimazione di errore quadratico minimo nella base

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = \sin \frac{\pi x}{12}, \quad \phi_2(x) = \cos \frac{\pi x}{12}$$

(5 punti);

$c)$ costruire la tabella delle differenze divise della funzione T fino al secondo ordine, segnalando la eventuale perdita di cifre significative per sottrazione (4 punti).

Esercizio 2.

$a)$ Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione per funzioni regolari, e le principali maggiorazioni di errore che ne derivano (6+2 punti);

$b)$ maggiorare (in funzione del parametro h) l'errore di interpolazione sull'intervallo $[0, 3h]$, utilizzando come nodi i due punti $x_0 = h$ e $x_1 = 2h$ (3 punti).

Esercizio 3.

$a)$ Descrivere la classe di formule di quadratura di Newton–Cotes e costruire la formula aperta a due punti (4+2 punti);

$b)$ basandosi sulla stima ottenuta al punto $2.b$, maggiorare l'errore di integrazione di quest'ultima formula sull'intervallo $[0, 3h]$ (2 punti);

$c)$ approssimare l'integrale

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

utilizzando tale quadratura in forma composita, su due sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Nella base scelta, la matrice Φ ha la forma

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed a conti fatti per il sistema delle equazioni normali si ottiene la matrice diagonale:

$$A = \Phi\Phi^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed il vettore dei termini noti (calcolato con tre decimali)

$$b = \Phi^t y = \begin{pmatrix} 105.4 \\ -6.375 \\ -11.893 \end{pmatrix}.$$

Il sistema é diagonale, e (anche se non richiesto dall'esercizio) puó essere immediatamente risolto fornendo la soluzione $a_1 = 13.175$, $a_2 = -1.594$, $a_3 = -2.973$.

c) Costruiamo la tabella mantenendo le tre cifre significative dei dati. Si ha, per le differenze di primo ordine:

$$T[x_0, x_1] = 0.0667, \quad T[x_1, x_2] = 1.5, \quad T[x_2, x_3] = 0.6, \quad T[x_3, x_4] = -0.1,$$

$$T[x_4, x_5] = -0.7, \quad T[x_5, x_6] = -0.7, \quad T[x_6, x_7] = -0.367,$$

in cui si presenta sempre cancellazione di cifre significative. Per le differenze del secondo ordine si ha invece:

$$T[x_0, x_1, x_2] = 0.239, \quad T[x_1, x_2, x_3] = 0.15(*), \quad T[x_2, x_3, x_4] = -0.117,$$

$$T[x_3, x_4, x_5] = -0.1, \quad T[x_4, x_5, x_6] = 0(*), \quad T[x_5, x_6, x_7] = 0.556,$$

in cui si sono segnalate con l'asterisco le (ulteriori) cancellazioni di cifre significative.

Esercizio 2.

b) Essendo i nodi simmetrici rispetto al centro dell'intervallo, il modulo del polinomio di errore $\omega_1(x) = (x-h)(x-2h)$ ha un massimo nello stesso punto centrale, in cui si ha

$$\left|\omega_1\left(\frac{3h}{2}\right)\right| = \frac{h^2}{4},$$

mentre agli estremi vale

$$|\omega_1(0)| = |\omega_1(3h)| = 2h^2.$$

Si ottiene quindi, nell'intervallo $[0, 3h]$,

$$\|f - \Pi_1\|_\infty \leq h^2 \|f''\|_\infty.$$

Esercizio 3.

b) Si ottiene immediatamente

$$|I(f) - I_1(f)| \leq 3h^3 \|f''\|_\infty.$$

c) Si ha, con sei decimali, $I_1(f, 0, \pi) = 2.145748$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 14.06.10

Esercizio 1. Descrivere l'algoritmo di fattorizzazione di Doolittle in assenza di pivotazione e derivarne l'algoritmo di Cholesky, calcolando la complessitá per entrambi (4+3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di bisezione per la soluzione di equazioni scalari (2 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (5 punti);

c) individuare un intervallo opportuno per applicarlo al calcolo della radice positiva dell'equazione

$$x^4 + x^2 - x = 0$$

e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore dell'ordine della precisione di macchina in rappresentazione `float` (1+3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle approssimazioni per interpolazione in una base generica (6 punti);

b) calcolare la costante di Lebesgue Λ_1 relativa ad una interpolazione di grado $n = 1$ sull'intervallo $[-1, 1]$ con i nodi $x_0 = -1/2$, $x_1 = 1/2$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule di Newton–Cotes composite (5 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^{10} e^{-x} dx$$

con una formula di Simpson composita su 5 sottointervalli, fornendo anche una stima di andamento dell'errore per un numero qualsiasi di sottointervalli (3+1 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) Si puó ad esempio partire dall'intervallo $[1/2, 1]$ per cui si ha $f(1/2) < 0$, $f(1) > 0$. Essendo la precisione di macchina in aritmetica `float` dell'ordine di 10^{-7}, e l'ampiezza iniziale $b_0 - a_0 = 1/2$, la precisione richiesta si ottiene alla ventiduesima iterazione circa.

Esercizio 3.

b) Le due funzioni di base sono

$$L_0(x) = \frac{1}{2} - x, \quad L_1(x) = \frac{1}{2} + x.$$

Nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$ entrambe sono positive e a somma unitaria e quindi in questo intervallo la funzione di Lebesgue vale $\Lambda(x) \equiv 1$, mentre ad esempio per $x > 1/2$ si ha

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \left|\frac{1}{2} - x\right| + \left|x + \frac{1}{2}\right| = \\ &= x - \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} = 2x, \end{aligned}$$

che ha massimo in $x = 1$. Poiché la situazione é simmetrica per $x < -1/2$, si ottiene $\Lambda_1 = \Lambda(\pm 1) = 2$.

Esercizio 4.

b) Con sei decimali, $I_{2,5} = 1.004912$ (il risultato esatto é $1 - e^{-10} = 0.999955$).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 14.06.10

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca parziale o a passo fisso (6 punti);

b) derivare (direttamente, o dal teorema precedente) le condizioni di convergenza per il metodo del gradiente a passo fisso, nel caso di funzioni quadratiche (3 punti);

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di penalizzazione per problemi di minimizzazione vincolata (2 punti);

b) enunciarne e dimostrarne il risultato di convergenza (6 punti);

c) scrivere la formulazione penalizzata del problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = x_2^2,$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$$

(2 punti);

d) calcolare il massimo passo utilizzabile con un metodo del gradiente a passo fisso, in funzione del parametro di penalizzazione (3 punti).

Esercizio 3. Derivare le condizioni di consistenza per gli schemi di Runge–Kutta di ordine 2 (4 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere costruzione e caratteristiche generali degli schemi BDF (3 punti);

b) costruire lo schema BDF a 2 passi (4 punti);

c) verificare che soddisfa la condizione delle radici (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Nel caso di funzioni quadratiche della forma

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x),$$

si ha $\nabla f(x) = Ax - b$ ed il metodo del gradiente a passo fisso coincide quindi con il metodo di Richardson, che converge sotto la condizione (necessaria e sufficiente)

$$\beta < \frac{2}{\lambda_{max}(A)}. \tag{$*$}$$

Esercizio 2.

c) La funzione penalizzata vale

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}(x_1 + 2x_2)^2 =$$

$$= \frac{x_1^2}{\varepsilon} + \frac{4x_1x_2}{\varepsilon} + \left(\frac{4}{\varepsilon} + 1\right) x_2^2.$$

La matrice Hessiana della funzione f_ε vale

$$H_{f_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2/\varepsilon & 4/\varepsilon \\ 4/\varepsilon & 8/\varepsilon + 2 \end{pmatrix}$$

ed ha l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\left(\frac{5}{\varepsilon} + 1\right)\lambda + \frac{4}{\varepsilon} = 0.$$

L'autovalore piú grande é quindi

$$\lambda_{max} = 1 + \frac{5}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{25}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 1},$$

ed é su questo autovalore che va applicata la condizione $(*)$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 07.07.10

Esercizio 1.

a) Enunciare i teoremi di convergenza per i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel, e dimostrare il teorema relativo al metodo di Jacobi (2+4 punti).

Supponendo di simmetrizzare un sistema generico $Ax = b$ nella forma $A^tAx = A^tb$ per risolverlo con il metodo di Gauss–Seidel,

b) calcolare la complessitá supplementare introdotta dalla simmetrizzazione nel caso di un sistema con matrice piena (2 punti);

c) calcolare il condizionamento del sistema (nella norma $\|\cdot\|_\infty$) prima e dopo la simmetrizzazione, nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(4 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema relativo all'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di interpolazione composita e fornirne una maggiorazione d'errore per funzioni regolari (2+2 punti);

b) supponendo di approssimare la funzione $f(x) = 1/x$ per $x \in [1, 6]$ mediante una interpolazione composita di grado $n = 1$ a tratti, dire quanti nodi sono necessari perché l'errore non superi il valore 10^{-3} (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema relativo al grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$$

con una quadratura di Gauss–Legendre a 5 punti (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Il costo dominante é quello del calcolo di A^tA, in cui ogni elemento richiede un prodotto scalare, quindi $O(2n)$ operazioni. Il costo supplementare risulta perció di $O(2n^3)$ operazioni.

c) Per il sistema originale si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $K_\infty(A) = 56/32 = 1.75$. Per il sistema simmetrizzato si ottiene invece

$$B = A^tA = \begin{pmatrix} 37 & -7 \\ -7 & 29 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1024}\begin{pmatrix} 29 & 7 \\ 7 & 37 \end{pmatrix}$$

per il quale il numero di condizionamento vale $K_\infty(B) = 44^2/1024 \approx 1.89$.

Esercizio 3.

b) Diamo per buono che si stiano supponendo equidistanti i nodi (il problema nel caso piú generale sarebbe estremamente piú complesso). Se il passo tra i nodi é h, si tratta semplicemente di richiedere che, nel caso peggiore tra tutti i sottointervalli, valga la maggiorazione

$$\frac{1}{2}\max_{[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)|\frac{h^2}{4} \le 10^{-3},$$

in cui $h^2/4$ é il massimo modulo del polinomio ω_1 tra i due nodi di interpolazione. Tenuto conto che sull'intervallo $[1, 6]$ si ha $\|f''\|_\infty = 2$, si ottiene la condizione

$$h^2 \le 4 \cdot 10^{-3},$$

che implica $h \le 0.0632$, ovvero di utilizzare almeno 81 nodi.

Esercizio 4.

b) Si ha, con sei decimali, $I_4 = 1.773569$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 13.09.10

Esercizio 1. Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss con pivotazione parziale e totale, calcolandone la complessitá (4+3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo delle corde per la soluzione di equazioni scalari (2 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (5 punti);

c) individuare un intervallo opportuno $[a, b]$ per applicarlo al calcolo della prima radice strettamente positiva dell'equazione

$$\sin x - \frac{x}{2} = 0$$

e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore minore di 10^{-5} per ogni $x_0 \in [a, b]$ (3+2 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione degli zeri dei polinomi di Legendre (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

con una formula di Gauss–Legendre a quattro punti (3 punti).

Esercizio 2.

c) Un possibile intervallo per applicare il metodo delle corde puó essere $[\pi/2, \pi]$. Agli estremi si ha:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0, \quad f(\pi) = -\frac{\pi}{2} < 0,$$

e la funzione di iterazione vale

$$g(x) = x - \frac{\pi/2}{f(\pi) - f(\pi/2)} f(x) =$$

$$= x + 0.8798 \cdot f(x).$$

D'altra parte, per $x \in [\pi/2, \pi]$ si ha $f'(x) \in [-3/2, -1/2]$ e di conseguenza

$$g'(x) \in [-0.32, 0.56]$$

ottenendo quindi per il coefficiente di contrazione $L_g = 0.56$. La condizione posta poi sull'errore di convergenza equivale a richiedere che

$$(b-a)L_g^k \leq 10^{-5}$$

e si ottiene (con l'intervallo stabilito) per $k \geq 21$.

Esercizio 4.

b) Si ottiene, con sei decimali, $I_3 = 3.703094$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN2) – 13.09.10

Esercizio 1.

a) Descrivere le principali strategie di scelta della direzione di ricerca nei metodi di discesa (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle Direzioni Coniugate per forme quadratiche (6 punti).
in alternativa: dimostrare che le direzioni generate tramite il metodo del Gradiente Coniugato sono coniugate (10 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di penalizzazione (3 punti);

b) enunciarne e dimostrarne il relativo teorema di convergenza (5 punti);

c) fornire una versione penalizzata del problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = e^{x_1^2+x_2^2}$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 = 1; x_1 + x_2 \leq 3\}.$$

(3 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per gli schemi ad un passo (6 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi BDF (2 punti);

b) dimostrare la consistenza e costruire l'insieme di stabilitá assoluta per il metodo di Eulero all'indietro (3+4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

c) Notiamo intanto che il dominio S é illimitato (una semiretta) ma il problema ammette soluzione essendo la funzione f coercitiva. Applicando la tecnica standard di penalizzazione sia per il vincolo di uguaglianza che per quello di disuguaglianza, si ottiene

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = e^{x_1^2+x_2^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left[(x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 3)^{+^2}\right].$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN1) – 07.02.11

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, enunciandone i relativi risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Richardson (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza monotona del metodo di Newton (5 punti);

b) discuterne la applicabilitá al calcolo delle radici dell'equazione

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

(3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione ed applicarla per calcolare *il piú precisamente possibile* l'errore nell'interpolazione di grado $n = 2$, effettuata ponendo i nodi nei punti estremi e nel punto medio dell'intervallo (4 punti);

b) utilizzare la stima ottenuta al punto precedente per ottenere il numero di nodi minimo necessario ad interpolare la funzione $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ nell'intervallo $[-1, 5]$ con un errore minore di 10^{-3} (5 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti);

b) calcolare i pesi di una formula di Newton–Cotes chiusa a quattro nodi (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Dato che le soluzioni devono essere nei lobi positivi del seno, e data la periodicità della funzione, possiamo limitarci all'intervallo $[0, \pi]$, dove la funzione è concava e dove ci sono due zeri simmetrici rispetto al punto centrale $\pi/2$. Nel primo zero la funzione è crescente, mentre nel secondo è decrescente: ne segue che per avere convergenza monotona occorre prendere x_0 a sinistra del primo zero (ad esempio, $x_0 = 0$), e a destra del secondo (ad esempio, $x_0 = \pi$).

Esercizio 3.

a) Per una distanza h tra i nodi, la maggiorazione ottimale di errore (si veda ad esempio l'esercizio 2.*b* del 29.09.99) è

$$\|f - \Pi_2\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty h^3}{9\sqrt{3}}$$

b) Si ha che $f'''(x) = -e^{-\frac{x}{2}}/8$, da cui

$$\|f'''\|_\infty = \max_{[-1,5]} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{8} = \frac{\sqrt{e}}{8}.$$

La condizione su h è quindi

$$\frac{\sqrt{e}h^3}{72\sqrt{3}} \leq 10^{-3},$$

e quindi $h \leq 0.422$, cioè (tenendo conto che il numero di nodi deve essere dispari) 15 nodi.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 12.04.11

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss (con pivotazione) per la soluzione di sistemi lineari e calcolarne la complessitá (4+2 punti);

b) Dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, ed enunciarne le condizioni di convergenza (5 punti).

Dato il sistema lineare $Ax = b$, dove A é una matrice a banda con elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -1/2 & \text{se } i = j \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) applicare a questo sistema il metodo di Richardson trovando quali sono i valori del passo β per cui $\|B_R\|_\infty < 1$, e calcolare il valore di β che minimizza questa norma (4+3 punti);

c) calcolare la costante di contrazione corrispondente al valore ottimale di β e dire quante iterazioni sono necessarie per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^6 (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) data l'equazione

$$\sqrt{x} - 2\sin x = 0$$

trovare un intervallo che permetta di applicare il metodo delle corde alla prima radice strettamente positiva, e calcolare la costante di contrazione del metodo cosí costruito (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) Notiamo intanto che la matrice A è definita positiva, come si può dedurre dal teorema di Gershgorin, e ci si può quindi restringere a valori positivi di β. Poiché $B_R = I - \beta A$, si ottiene

$$b_{ij} = \begin{cases} 1-2\beta & \text{se } i=j \\ -\beta/2 & \text{se } i=j\pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui

$$\|B_R\|_\infty = |1-2\beta| + \beta = \begin{cases} 1-\beta & \text{se } \beta \le 1/2 \\ 3\beta - 1 & \text{se } \beta \ge 1/2, \end{cases}$$

che è decrescente per $\beta < 1/2$, e crescente per $\beta > 1/2$. Si ha quindi che $\|B_R\|_\infty$ viene minimizzata per $\beta = 1/2$, e il metodo è contrattivo per $\beta < 2/3$.

c) Poiché in corrispondenza al valore ottimale si ha $\|B_R\|_\infty = 1/2$, la condizione sul numero di iterazioni k è che

$$\frac{1}{2^k} \le 10^{-6},$$

che corrisponde a 20 iterazioni.

Esercizio 3.

b) Ricordando che $x = 0^+$ è un punto a tangente verticale per la radice quadrata, occorre localizzare la radice in un intervallo $[a,b]$ con $a > 0$. Tabulando ad esempio con passo 0.1, si trova un cambio di segno in $[0.2, 0.3]$, ed utilizzando questo intervallo per applicare il metodo delle corde, si ha $f(0.2) \approx 0.05$, $f(0.3) \approx -0.0433$, a partire dai quali si ottiene l'iterazione

$$x_{k+1} = x_k + 1.0718 \cdot (\sqrt{x_k} - 2\sin x_k).$$

Si ha d'altra parte

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\cos x,$$

e (restringendosi all'intervallo $[0.2, 0.3]$, e continuando a lavorare con quattro cifre decimali) si può notare che

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \in [0.9129, 1.118], \quad 2\cos x \in [1.9107, 1.9601],$$

da cui si ottiene $f'(x) \in [-1.0472, -0.7927]$ e quindi, usando le stime superiore ed inferiore sulla derivata f',

$$g'(x) \in 1 - 1.0718 \cdot [-1.0472, -0.7927] = [-0.1224, 0.1504].$$

La costante di contrazione del metodo si può quindi stimare come $L_g \le 0.1504$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 13.04.11

Esercizio 1. Dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} 2x_1 + \cos x_1 \cos x_2 = 0 \\ 4x_2 - \sin x_1 \sin x_2 = 0, \end{cases}$$

a) scrivere il metodo di Newton per la sua soluzione, nella forma senza inversione di matrici (2 punti);

b) scrivere un metodo di Newton approssimato, ottenuto calcolando la matrice Jacobiana nel solo punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (3 punti);

c) scrivere un metodo di tipo Richardson, ottenuto spostandosi con passo β nella direzione opposta al residuo, e giustificare il fatto che (per questo sistema) tale metodo sia convergente per β sufficientemente piccolo (2+3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti).

b) specificando le ipotesi opportune, dimostrare che le direzioni di ricerca unidimensionale del metodo di Newton soddisfano le condizioni di questo teorema (5 punti);

c) descrivere brevemente le strategie di minimizzazione unidimensionale esatta utilizzate nei metodi di discesa (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il principio generale dei metodi di Direzioni Coniugate, dettagliando in particolare la generazione delle direzioni per funzioni quadratiche e non (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza in n passi dei metodi CD per funzioni quadratiche (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

a) La matrice Jacobiana del sistema è

$$J_F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 - \sin x_1 \cos x_2 & -\cos x_1 \sin x_2 \\ -\cos x_1 \sin x_2 & 4 - \sin x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$$

e il metodo di Newton si scrive in forma di sistema lineare come

$$\begin{pmatrix} 2 - \sin x_1^{(k)} \cos x_2^{(k)} & -\cos x_1^{(k)} \sin x_2^{(k)} \\ -\cos x_1^{(k)} \sin x_2^{(k)} & 4 - \sin x_1^{(k)} \cos x_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_1^{(k)} - \cos x_1^{(k)} \cos x_2^{(k)} \\ -4x_2^{(k)} + \sin x_1^{(k)} \sin x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

b) Calcolando la matrice Jacobiana nell'origine ed invertendola (in questo caso la matrice è diagonale) si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^{(k)} - \frac{1}{2} \cos x_1^{(k)} \cos x_2^{(k)} \\ -x_2^{(k)} + \frac{1}{4} \sin x_1^{(k)} \sin x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

ovvero, più esplicitamente,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos x_1^{(k)} \cos x_2^{(k)} \\ \frac{1}{4} \sin x_1^{(k)} \sin x_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

c) Il residuo del sistema altro non è che il vettore $F(x)$, ed il metodo in questione si scrive in forma compatta come

$$x_{k+1} = x_k - \beta F(x_k). \qquad (*)$$

Per dimostrare la convergenza, si osservi che la matrice Jacobiana è simmetrica e definita positiva (poiché a diagonale dominante e con elementi positivi sulla diagonale). Tale matrice si può quindi interpretare come matrice Hessiana di una funzione convessa $f(x)$ (con $\nabla f(x) = F(x)$), ed il metodo $(*)$ come un metodo di gradiente a passo fisso.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 01.06.11

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione, ed indicare le principali maggiorazioni dell'errore che ne derivano (6+2 punti);

b) Data la funzione $f(x) = \cos x$ in $[0, \pi]$, se ne consideri l'interpolazione composita di grado $n = 1$ a tratti, utilizzando i nodi (non equidistanti) $x = 0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$. Si maggiori l'errore di interpolazione in modo il piú accurato possibile (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di approssimazione tramite polinomio di Hermite (4 punti);

b) Scrivere la base di Hermite nel caso di una interpolazione sull'intervallo $[0, 1]$ in cui si imponga in $x_0 = 0$ il valore della sola interpolata ed in $x_1 = 1$ il valore dell'interpolata e della sua derivata (4 punti);

c) Derivare dal punto precedente una formula di quadratura nella forma

$$I_2(f; 0, 1) = \alpha f(x_0) + \beta f(x_1) + \gamma f'(x_1)$$

(3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti);

b) Integrare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sull'intervallo $[-1, 1]$ con formule di Gauss–Legendre a 3, 4, 5, 6 nodi (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Per la funzione ed il grado di interpolazione considerati, la migliore maggiorazione di errore in un intervallo I di ampiezza H è data da

$$\sup_I |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{\sup_I |\cos x| H^2}{8}.$$

Per il primo ed il terzo dei sottointervalli in cui è diviso $[0, \pi]$ si ha $H = \pi/4$ e $\sup |\cos x| = 1$, da cui

$$\sup_I |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{\pi^2}{144},$$

mentre per il secondo dei sottointervalli si ha $H = \pi/2$ e $\sup |\cos x| = 1/\sqrt{2}$, da cui

$$\sup_I |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{\pi^2}{32\sqrt{2}},$$

che essendo il caso peggiore tra i tre, è la stima di errore richiesta.

Esercizio 2.

b) La base di Hermite consta di tre polinomi di secondo grado, L_{00} per il nodo x_0, L_{10} e L_{11} per il nodo x_1. Considerando polinomi a coefficienti generici, e determinando i coefficienti in base alle condizioni su valore e derivata, si ottiene:

$$L_{00}(x) = (x-1)^2,$$

$$L_{10}(x) = x(2-x), \quad L_{11}(x) = x(x-1).$$

c) I coefficienti della formula di quadratura si ottengono integrando le funzione della base di Hermite, e più precisamente

$$\alpha = \int_0^1 L_{00}(x)dx = \frac{1}{3}, \quad \beta = \int_0^1 L_{10}(x)dx = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \int_0^1 L_{11}(x)dx = -\frac{1}{6}.$$

Esercizio 3.

b) Si ha, in precisione semplice,

$$I_2(f; -1, 1) = 0.8888889,$$

$$I_3(f; -1, 1) = 1.3042903,$$

$$I_4(f; -1, 1) = 0.5688889,$$

$$I_5(f; -1, 1) = 0.9358279.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 04.06.11

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di penalizzazione (5 punti);

b) Dato il problema di minimizzazione vincolata

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^2 - x_1 x_2 \\ |x_1| \leq 1 \end{cases}$$

darne una formulazione per penalizzazione in modo che la funzione penalizzata sia rispettivamente C^1 e C^2 (2+2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (6 punti);

b) Dimostrare che il metodo di Crank–Nicolson soddisfa le ipotesi del teorema generale con ordine di consistenza $q = 2$ (4 punti);

c) Supponendo di applicare il metodo di Crank–Nicolson calcolando u_{k+1} per sostituzioni successive, dire qual é il massimo valore di h (in funzione della costante di Lipschitz L_f) che garantisce la convergenza delle iterazioni (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams e fornirne gli esempi piú semplici (4 punti);

b) Enunciare la condizione delle radici e dimostrare che é sempre soddisfatta nei metodi di Adams (4 punti);

c) Costruire il metodo di Adams esplicito a tre passi (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Con la scelta più tipica del termine di penalizzazione, si otterrebbe la funzione penalizzata

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2 + \frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - 1)^{+2}.$$

In questo caso, come è facile verificare (utilizzando ad esempio la sua simmetria radiale), il termine di penalizzazione ha derivate prime continue, mentre le derivate seconde sono solo limitate. Per rendere continue anche le derivate seconde, occorre utilizzare una potenza superiore nella costruzione del termine di penalizzazione, ad esempio ponendo

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^2 - x_1x_2 + \frac{1}{\varepsilon}(|x_1| - 1)^{+3}.$$

Esercizio 2.

c) Scritto il metodo di Crank–Nicolson in forma di sostituzioni successive:

$$u_{k+1}^{(n+1)} = u_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}^{(n)})\right], \tag{$*$}$$

la derivata del secondo membro rispetto all'argomento $u_{k+1}^{(n)}$ vale $hL_f/2$. La convergenza delle iterazioni $(*)$ si ottiene quindi per $h < 2/L_f$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 14.06.11

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti);

b) Dato il sistema lineare, dipendente dal parametro reale α:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3\alpha x_2 = 1, \end{cases}$$

dare le condizioni su α sufficienti a garantire la convergenza dei metodi rispettivamente di Jacobi, di Gauss–Seidel, SOR e di Richardson (2+2+2+2).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione e derivarne una maggiorazione di errore per le interpolazioni composite (5 punti);

b) Maggiorare l'errore per una interpolazione composita di grado rispettivamente $n = 1$ e $n = 2$ della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$ con 21 nodi equidistanti (3+3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule di Newton–Cotes composite (5 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_1^6 \ln x dx$$

con una formula dei trapezi composita su 5 sottointervalli (2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Per il metodo di Jacobi, la dominanza diagonale richiede che $|\alpha| > 2$ (il che implica che la seconda condizione, $|3\alpha| > 2$ è sicuramente soddisfatta). Per il metodo di Gauss–Seidel, a questa condizione si aggiunge la possibilità che la matrice sia definita positiva, cosa che avviene se $\alpha > 0$ e $3\alpha^2 - 4 > 0$, cioè in ultima analisi se $\alpha > 2/\sqrt{3}$. Il metodo di GS converge quindi se $\alpha < -2$ o $\alpha > 2/\sqrt{3}$. Per i metodi SOR e Richardson, occorre che la matrice sia definita positiva, quindi la condizione che si richiede su α è che $\alpha > 2/\sqrt{3}$. Questo implica la convergenza per $0 < \omega < 2$ nel caso SOR e per β abbastanza piccolo nel caso Richardson.

Esercizio 3.

b) Si ha intanto, per le derivate seconda e terza:

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}.$$

Gli estremi della derivata seconda si potrebbero trovare annullando la derivata terza, e quelli della derivata terza annullando la derivata quarta, che è un polinomio di sole potenze pari di x (e può quindi essere risolto rispetto alla variabile x^2). Una maggiorazione più rozza, ma molto più semplice, si può ottenere tenendo conto che, nell'intervallo $[-1, 1]$, si ha $|e^{-x^2}| \le 1$, e quindi

$$|f''(x)| \le |4x^2 - 2| \le 2,$$

$$|f'''(x)| \le |8x^3 - 12x| \le \max(4\sqrt{2}, 4) = 4\sqrt{2}.$$

Utilizzando ora la stima più semplice anche per $\|\omega_n\|_\infty$ (e ricordando che $H = 0.1$ per $n = 1$, $H = 0.2$ per $n = 2$), si ottengono le maggiorazioni di errore

$$\|f - \Pi_{1,H}\|_\infty \le H^2 = 0.01,$$

$$\|f - \Pi_{2,H}\|_\infty \le \frac{4\sqrt{2}H^3}{6} = 7.54 \cdot 10^{-3}.$$

E' naturalmente possibile raffinare ulteriormente la stima calcolando più accuratamente la norma sia delle derivate che del polinomio di errore ω_n.

Esercizio 4.

b) Si ottiene, con tre decimali, $I_{1,5} \approx 5.683$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 16.06.11

Esercizio 1.

a) Descrivere le strategie di ricerca unidimensionale parziale di Armijo–Goldstein e di Wolfe–Powell (2+2 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema generale di convergenza per i metodi di discesa in ricerca parziale e a passo fisso (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale dei metodi Quasi-Newton ed enunciarne i principali risultati di convergenza (4 punti);

b) costruire la formula di aggiornamento di Davidon–Fletcher–Powell (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo del gradiente proiettato ed enunciare il relativo teorema di convergenza (3+2 punti);

b) sfruttando la possibilitá di calcolare esplicitamente la proiezione di un punto su un disco, effettuare due iterazioni del metodo del gradiente proiettato, a partire dal punto $(0.5, 0.5)$, per il problema vincolato

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$S = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

(3 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi BDF (3 punti);

b) costruire il metodo BDF a 2 passi (4 punti);

c) verificare che soddisfa la condizione delle radici (3 punti);

Esercizio 3.

b) Calcoliamo intanto il gradiente di f, che è dato da

$$\nabla f(x_1, x_2) = 2(x_1 - x_2).$$

Partendo dal punto $x^{(0)} = (0.5, 0.5)$ si ha

$$v^{(0)} = x^{(0)} - \nabla f(x^{(0)}) = (1.5, -0.5)$$

la cui proiezione sul disco unitario è

$$P_S(v^{(0)}) = v^{(0)}/\|v^{(0)}\| = (1.5, -0.5) = (0.948683, -0.316228).$$

Un estremo della f sul segmento tra $x^{(0)}$ e $P_S(v^{(0)})$ dovrebbe essere caratterizzato dalla condizione di tangenza tra il segmento stesso e una curva di livello. Non è troppo difficile verificare invece che non ci sono punti di tangenza, e quindi estremi interni della funzione, sul segmento. Poiché $f(x^{(0)}) = 0$ e $f(P_S(v^{(0)})) \approx 0.8$, si ha $x^{(1)} = x^{(0)}$ e l'algoritmo resta stallato nel punto iniziale. Tale comportamento non è in contraddizione con il teorema generale di convergenza, essendo $f(x)$ non convessa.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 12.07.11

Esercizio 1.

a) Descrivere i metodi di fattorizzazione di Doolittle (senza pivotazione) e Cholesky (4 punti);

b) Data la matrice simmetrica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

costruirne le fattorizzazioni di Doolittle e di Cholesky (2+2 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) Supponendo di applicare il metodo di Newton all'equazione

$$x^2 - a = 0,$$

valutare in modo il piú preciso possibile l'intervallo dove é possibile scegliere il punto x_0 perché il metodo converga alla radice positiva (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le interpolazioni in una base generica (6 punti);

b) Calcolare la costante di Lebesgue in $[-3/2, 3/2]$ per una interpolazione di Lagrange costruita sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule Gaussiane (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

con la formula di Gauss–Legendre a tre nodi (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice è definita positiva, quindi anche la fattorizzazione LU può essere portata a termine senza scambi di righe. Si ha, rispettivamente nei due casi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 9/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.

b) Trattandosi di una funzione convessa, conviene ragionare in termini di convergenza monotona. Nel semiasse positivo la funzione è crescente, ed il metodo di Newton converge quindi per ogni $x_0 > \sqrt{a}$. Per $x_0 \in (0, \sqrt{a})$, per convessità, la tangente al grafico di f interseca alla prima iterazione l'asse delle ascisse in un punto $x_1 > \sqrt{a}$. A partire da questo punto si instaura quindi di nuovo una convergenza monotona. L'insieme di convergenza è quindi tutto il semiasse positivo, con l'esclusione dell'origine in cui il metodo non è definito. Tale insieme è effettivamente massimale: nel semiasse negativo si ha (per simmetria) convergenza alla soluzione negativa.

Esercizio 3.

b) Come si è visto, ad esempio nell'esercizio 3.*b* del 15.01.07, essendo la funzione di Lebesgue quadratica tra un nodo e l'altro, il suo massimo può cadere o nel punto medio tra due nodi, o in un estremo. Si ha quindi

$$\Lambda_2 = \max(\Lambda(\pm 1/2), \Lambda(\pm 3/2)) = \max(5/4, 7/2) = 7/2.$$

Esercizio 4.

b) Si ha, in precisione semplice, $I_2 = 1.591617$ (il risultato corretto è $I = \pi/2$).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 14.07.11

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi nonlineari e le sue principali varianti (3 punti);

b) dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2 - e^{-x_1} = 0 \end{cases}$$

scrivere un metodo di Newton approssimato per calcolare la radice situata nel quadrante positivo, calcolandone la costante di contrazione (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) Descrivere la strategia di ricerca unidimensionale per bisezione (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo di penalizzazione ed applicarlo al problema vincolato

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$S = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

(3+2 punti);

b) Enunciarne e dimostrarne il teorema di convergenza (5 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare che il metodo di Eulero implicito soddisfa le condizioni del teorema generale di convergenza per gli schemi ad un passo (4 punti);

b) Calcolarne la regione di stabilitá assoluta nel piano complesso (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La matrice Jacobiana del sistema è

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ e^{-x_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una adeguata approssimazione iniziale, si può osservare che la soluzione richiesta è l'intersezione della curva esponenziale $x_2 = e^{-x_1}$ con una circonferenza unitaria. Si può quindi tentare di scegliere come punto iniziale $x^{(0)} = (1, 0)$ supponendo che la soluzione non ne sia troppo lontana. Si ha:

$$J_F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

per la quale

$$J_F(x^{(0)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -e^{-1}/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il metodo delle corde si basa d'altra parte sulla iterazione

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F(x^{(0)})^{-1} F(x^{(k)}),$$

la cui costante di contrazione è la norma della matrice

$$J_T(x) = I - J_F(x^{(0)})^{-1} J_F(x) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 & -x_2 \\ e^{-1}x_1 - e^{-x_1} & e^{-1}x_2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando ad esempio lo studio nella norma $\|\cdot\|_\infty$, si hanno le due condizioni di contrattività

$$|1 - x_1| + |x_2| < 1,$$

$$|x_1 - e^{1-x_1}| + |x_2| < e.$$

La prima individua sul piano delle x un quadrato ruotato di $\pi/4$ e di lato $\sqrt{2}$ centrato in $(1, 0)$. La seconda è invece di soluzione molto più complessa. Con vari espedienti (non semplici) si può dimostrare comunque che tutti i punti che soddisfano la prima soddisfano anche la seconda. Il quadrato individuato sopra è quindi l'insieme di contrattività del metodo. Individuare una costante di contrazione è però proibitivamente complesso.

Esercizio 2.

a) Si ha:

$$f_\varepsilon(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2 + x_2^2 - 1)_+^2.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 12.09.11

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti);

b) Dato il sistema lineare $Ax = b$, in cui la matrice A (di dimensioni $n \times n$) abbia la struttura a banda

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i = j \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

calcolare la complessitá di una iterazione del metodo di Jacobi in funzione di n e dire quante iterazioni sono necessarie perché l'errore nella norma $\|\cdot\|_\infty$ scenda sotto al valore $10^{-7} \cdot \|x^{(0)} - \bar{x}\|_\infty$ (2+3 punti);

c) supponendo che il numero di iterazioni finale sia quello del punto precedente, dire a partire da quale valore di n il metodo di Jacobi diviene meno complesso della eliminazione di Gauss (4 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) data la tabella di punti

x_i	y_i
0.0	3.1
0.5	2.3
1.0	1.9
1.5	1.7
2.0	1.6

costruirne l'approssimazione di errore quadratico minimo nella base

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = e^{-x}.$$

(5 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Scritta una generica componente dell'aggiornamento (per le righe $2, \ldots, n-1$) come

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - x_{i-1}^{(k)} - x_{i+1}^{(k)}}{3}$$

la complessità dell'aggiornamento di una variabile risulta essere di 3 operazioni, e quindi una iterazione costa $O(3n)$ operazioni. D'altra parte, come è facile verificare, la costante di contrazione è $L = 2/3$, e quindi per arrivare alla accuratezza richiesta occorre che

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq 10^{-7}$$

il che equivale a richiedere che il numero k di iterazioni soddisfi

$$k \log_{10} \frac{2}{3} < -7$$

che corrisponde a 40 iterazioni, per una complessità totale di $O(120n)$ operazioni.

c) Poiché il metodo di Gauss ha un costo di $O(2n^3/3)$ operazioni, il metodo di Jacobi diventa meno complesso appena la dimensione n del sistema soddisfa la disuguaglianza

$$\frac{2}{3}n^3 > 120n,$$

ovvero quando $n > \sqrt{180}$, cioè alla quattordicesima iterazione. Si potrebbe notare che il MEG, nel caso di una matrice a banda come quella considerata, ha in effetti complessità quadratica (una variabile si deve eliminare dalla sola equazione appena successiva). Ma anche nel caso di una complessità $O(cn^2)$, si ottiene che a partire da una certa dimensione il metodo di Jacobi diviene meno complesso (per l'esattezza, per $n > 120/c$).

Esercizio 3.

b) A conti fatti (ed in precisione semplice), la matrice Φ è data da

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.6065307 \\ 1 & 0.3678794 \\ 1 & 0.2231302 \\ 1 & 0.1353353 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene quindi un sistema delle equazioni normali nella forma

$$\begin{cases} 5a_1 + 2.332876a_2 = 10.6 \\ 2.332876a_1 + 1.571317a_2 = 5.789849 \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 1.30431$, $a_2 = 1.748251$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 13.09.11

Esercizio 1.

a) Descrivere le principali strategie di scelta delle direzioni di ricerca nei metodi di discesa (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza in n passi per i metodi di Direzioni Coniugate nel caso quadratico (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di ricerca unidimensionale per bisezione, e scriverne un diagramma di flusso o pseudocodice (3+1 punti);

b) dimostrare che, se la funzione é unimodale, ad un passo generico dell'algoritmo il minimo é contenuto nell'intervallo $[a_n, b_n]$ (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i principali metodi duali per la minimizzazione vincolata di funzioni (3 punti);

b) enunciarne i teoremi di convergenza e dimostrare quello relativo al metodo di penalizzazione (6 punti).

Esercizio 4. Scritta la forma generale di un metodo di Runge–Kutta a due stadi,

a) trovare le condizioni che garantiscono il secondo ordine di consistenza (5 punti);

b) posto $z = h\lambda = x + iy$, esprimere il piú esplicitamente possibile la regione di stabilitá assoluta nel piano complesso (4 punti).

Esercizio 4.

b) Per evitare radici, la regione di stabilità assoluta per i metodi di secondo ordine può essere definita dalla disuguaglianza

$$\left|1+z+\frac{z^2}{2}\right|^2 \leq 1.$$

D'altra parte,

$$\left|1+z+\frac{z^2}{2}\right|^2 = \left(1+x+\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2 + (y+xy)^2 =$$

$$= 1+2x+2x^2+x^3+xy^2+\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2} \leq 1$$

che dà finalmente

$$2x+2x^2+x^3+xy^2+\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2} \leq 0.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 16.01.12

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss con pivotazione e calcolarne la complessitá (4+2 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é costituita dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti);

b) data la funzione polinomiale

$$f(x) = x^3 - 5x + 3$$

e supponendo di volerne calcolare per bisezione la radice di valore maggiore, individuare un intervallo iniziale opportuno e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore minore di 10^{-6} (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore basandosi sulla forma di Lagrange (5 punti);

b) calcolare la costante di Lebesgue su $[-1, 1]$ per una interpolazione costruita sui nodi $x_0 = -3/4$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3/4$ (4 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule Gaussiane (6 punti);

Esercizio 4.

b) Come è facile verificare mediante uno studio sommario, ci sono tre radici reali, due nel semiasse positivo ed una nel semiasse negativo. Si tratta quindi di trovare $a_0 > 0$ tale che $f(a_0) < 0$ e $b_0 > a_0$ tale che $f(b_0) > 0$, ad esempio $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$. Poiché $b_0 - a_0 = 1$, l'errore richiesto si ottiene quando $2^{-k} < 10^{-6}$, cioè alla ventesima iterazione.

Esercizio 3.

b) Essendo la funzione di Lebesgue pari, e quadratica tra un nodo e l'altro, per calcolarne il massimo basta calcolarla nel punto medio $x = 3/8$ e nell'estremo $x = 1$, e prendere il massimo dei due valori. Poiché

$$L_0(x) = \frac{8}{9}x\left(x - \frac{3}{4}\right),$$

$$L_1(x) = -\frac{16}{9}\left(x^2 - \frac{9}{16}\right),$$

$$L_2(x) = \frac{8}{9}x\left(x + \frac{3}{4}\right),$$

si ha per $x = 3/8$:

$$L_0\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{8}, \quad L_1\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}, \quad L_2\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8},$$

da cui $\Lambda(3/8) = 5/4$. Per $x = 1$ si ha invece:

$$L_0(1) = \frac{2}{9}, \quad L_1(1) = -\frac{7}{9}, \quad L_2(1) = \frac{14}{9},$$

da cui $\Lambda(1) = 23/9$, che coincide quindi con la costante di Lebesgue Λ_2.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 18.01.12

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) verificare che le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte dal metodo di Newton e dai metodi del Gradiente Coniugato e Quasi Newton (in questi due casi, implementati con reinizializzazione) (3+1+1 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i metodi di ricerca unidimensionale parziale di Armijo–Goldstein e Wolfe–Powell (2+2 punti);

b) scrivere uno dei due in forma di diagramma di flusso o pseudocodice (2 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo di Uzawa ed enunciarne il teorema di convergenza (3 punti);

b) dato il problema vincolato $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1,$$

$$S = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \leq x_2\}$$

verificare la applicabilitá del metodo di Uzawa, ed in caso positivo effettuarne due iterazioni complete (4 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams e verificarne la zero-stabilitá (2+4 punti);

b) costruire il metodo di Adams–Moulton ad un passo e calcolarne la regione di stabilitá assoluta nel piano complesso (4 punti).

Esercizio 3.

b) Poiché l'insieme S è convesso e definito da un vincolo regolare,

$$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \leq 0,$$

e la funzione f è a sua volta regolare, si tratta solo di verificare che f sia convessa. A conti fatti, si ha per la matrice Hessiana l'espressione

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che garantisce la convessità di f e quindi l'applicabilità del metodo di Uzawa. La funzione Lagrangiana ha la forma

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + \lambda(x_1 - x_2)$$

e le relative condizioni di stazionarietà rispetto ad x forniscono il sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 - \lambda \\ -x_1 + 2x_2 = \lambda \end{cases}.$$

Partendo ora dall'approssimazione iniziale $\lambda_0 = 1$, e ponendo $\beta = 0.1$, si ottiene:

$$x^{(0)} = \text{argmin}\,(f(x) - \lambda_0 g(x)) = (1/7, 4/7),$$

ed alle iterazioni successive si ha:

$$\lambda_1 = P_{\mathbf{R}_+}[\lambda_0 + \beta g(x^{(0)})] = P_{\mathbf{R}_+}[1 - 0.1 \cdot 3/7] = 67/70 \approx 0.957143$$

$$x^{(1)} = \text{argmin}\,(f(x) - \lambda_1 g(x)) = (73/490, 271/490) \approx (0.14898, 0.553061),$$

$$\lambda_2 = P_{\mathbf{R}_+}[\lambda_1 + \beta g(x^{(1)})] \approx P_{\mathbf{R}_+}[1 - 0.1 \cdot 0.404081] = 0.959592$$

$$x^{(2)} = \text{argmin}\,(f(x) - \lambda_2 g(x)) \approx (0.14863, 0.554111).$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 05.04.12

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss con pivotazione (4 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é costituita dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza relativo al metodo di Richardson (5 punti);

c) dimostrare che non esiste alcun valore del passo β tale da far convergere il metodo di Richardson in sistemi con matrici simmetriche indefinite (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) data l'equazione

$$\arctan x - \frac{x}{2} = 0, \tag{$*$}$$

trovare un intervallo adatto a costruire un metodo delle corde convergente alla radice strettamente positiva (4 punti);

c) dire se isolando direttamente la variabile x in $(*)$ puó essere ottenuto un metodo iterativo (nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$) convergente alla stessa radice (4 punti);

Soluzioni

Esercizio 2.

c) Nel metodo di Richardson e per una matrice A simmetrica, ad ogni autovalore $\lambda_i(A)$ della matrice del sistema corrisponde nella matrice di iterazione un autovalore

$$\lambda_i(B) = 1 - \beta\lambda_i(A).$$

Di conseguenza, la condizione di convergenza richiede che, per ogni i,

$$-1 < 1 - \beta\lambda_i(A) < 1,$$

ed in particolare, considerando solo la seconda disuguaglianza, che $\beta\lambda_i(A) < 0$. Quindi, β deve avere segno opposto a $\lambda_i(A)$, e non è possibile determinare un valore accetabile del passo se gli autovalori di A non hanno tutti lo stesso segno.

Esercizio 3.

b) Come è facile verificare, la funzione cambia segno sull'intervallo $[2, 3]$, ed infatti

$$f(2) \approx 0.107, \quad f(3) \approx -0.251.$$

Utilizzando questo intervallo per il calcolo del rapporto incrementale, si ha

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \approx -0.358.$$

Daltra parte, la derivata di f vale

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2},$$

e si tratta di una funzione monotona decrescente sul semiasse positivo, da cui si ottiene che, per $x \in [2, 3]$, $f'(x) \in [f'(3), f'(2)] = [-0.4, -0.3]$. Con la definizione usuale della funzione di iterazione $g(x)$, si ottiene quindi, sempre per $x \in [2, 3]$,

$$g'(x) \in [-0.117, 0.162]$$

e lo schema converge.

c) Isolando x come richiesto, si ottiene

$$x = 2 \arctan x = g(x).$$

Da uno studio grafico molto sommario (e tenendo conto che sul semiasse positivo la funzione $\arctan x$ è concava), si vede che a sinistra della radice $\bar{x}$ si ha $g(x) > x$, e a destra la disuguaglianza opposta. Ciò implica che

$$g'(\bar{x}) < 1$$

ed il metodo è quindi convergente per x_0 abbastanza vicino ad $\bar{x}$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 12.04.12

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Newton per la soluzione di sistemi nonlineari e le sue varianti principali (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

c) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

dire se é possibile (ed eventualmente come) costruire un metodo iterativo convergente nella forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - P\left(Ax^{(k)} - b\right),$$

con $P = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2)$ (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciarne e dimostrare il teorema di convergenza dei metodi di discesa in ricerca parziale o passo fisso (6 punti);

b) descrivere le strategie di ricerca parziale di Armijo–Goldstein e di Wolfe–Powell (5 punti);

Esercizio 3.

a) Descrivere le principali strategie di scelta delle direzioni di ricerca nei metodi di discesa, ed enunciarne i relativi risultati di convergenza in ricerca esatta (4 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle Direzioni Coniugate per forme quadratiche (6 punti).
in alternativa: dimostrare che le direzioni generate tramite il metodo del Gradiente Coniugato sono coniugate (10 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) La matrice di iterazione del metodo proposto ha la forma

$$B = I - PA = \begin{pmatrix} 1 + 5\beta_1 & -2\beta_1 \\ \beta_2 & 1 - 3\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Richiedendo ad esempio che il metodo sia contrattivo in norma $\|\cdot\|_\infty$, si ha intanto la condizione necessaria $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$. La costante di contrazione è

$$\|B\|_\infty = \max\left(|1 + 5\beta_1| - 2\beta_1, \beta_2 + |1 - 3\beta_2|\right),$$

ed è quindi effettivamente possibile trovare valori di β_1, β_2 per cui $\|B\|_\infty < 1$. Una soluzione ovvia è $\beta_1 = -1/5$, $\beta_2 = 1/3$, che corrisponde al metodo di Jacobi.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 31.05.12

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) si consideri l'intervallo $I = [-1, 1]$ ed i nodi (di Chebyshev–Gauss, per $n = 5$)

$$x_j = -\cos\frac{(2j+1)\pi}{12}.$$

Tenendo conto che il polinomio di errore $\omega_5^c(x)$ costruito su questi nodi è pari, e che assume valori di modulo uguale in tutti gli estremi, si stimi in modo ottimale l'errore di interpolazione (3 punti);

c) considerato il polinomio di errore $\omega_5^e(x)$ ottenuto invece con nodi equidistanti, calcolare (o stimare in qualche modo) $\sup|\omega_5^e|$ sugli intervalli $[x_2, x_3]$ e $[x_4, x_5]$ (2+3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) data la tabella di punti

x_i	y_i
-5.2	10.3
-4.5	8.6
-3.9	5.0
-2.1	3.7
-0.5	2.0
1.3	1.2
2.5	-1.5

si costruisca la retta di errore quadratico minimo (5 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i principi generali di costruzione ed uso delle formule di Newton–Cotes semplici e composite (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule composite (6 punti);

c) calcolare i pesi della formula di Simpson (3 punti);

d) integrare mediante la formula di Simpson composita la funzione $f(x) = \sin x/x$ in $[0, 2\pi]$ utilizzando una suddivisione in $m = 4$ sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Poiché il polinomio $\omega_5^c(x)$ è pari, presenta un estremo in $x = 0$, e poiché è un polinomio di Chebyshev, si ha

$$\|\omega_5^c\|_\infty = |\omega_5^c(0)|.$$

Si ottiene quindi

$$\|\omega_5^c\|_\infty = \prod_{j=0}^{6} x_j = x_0^2 x_1^2 x_2^2$$

in cui si è utilizzata anche la simmetria dei nodi. A conti fatti, si ottiene

$$\|\omega_5^c\|_\infty = \cos^2 \frac{\pi}{12} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{12} \approx 0.03125.$$

c) Nel caso siano equidistanti, i nodi sono nei punti ± 1, $\pm 3/5$ e $\pm 1/5$. Il polinomio di errore si scrive quindi

$$\omega_5^e(x) = (x+1)(x+3/5)(x+1/5)(x-1/5)(x-3/5)(x-1).$$

Tra i due nodi centrali il suo valore si maggiora come

$$|\omega_5^e(x)| \le |\omega_5^e(0)| = 9/625 = 0.0144.$$

Nell'intervallo $[x_4, x_5]$ dare una stima ottimale è difficile, ma maggiorando il polinomio termine a termine si otterrebbe

$$|\omega_5^e(x)| \le 2 \cdot 8/5 \cdot 6/5 \cdot 4/5 \cdot 2/5 \cdot 2/5 = \frac{7680}{15625} \approx 0.492$$

(il valore esatto, determinato graficamente, è di circa 0.07).

Esercizio 2.

b) Posta la retta nella forma $y = a_0 + a_1 x$, il sistema della equazioni normali si scrive

$$\begin{cases} 7a_0 - 12.4a_1 = 29.3 \\ -12.4a_0 + 75.1a_1 = -122.72, \end{cases}$$

e la soluzione è $a_0 = 1.8247621$, $a_1 = -1.3327956$.

Esercizio 3.

d) Il risultato, con sei decimali, è $I_{2,4} = 1.417851$.

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 01.06.12

Esercizio 1.

a) Descrivere la strategia della penalizzazione per i problemi di minimizzazione vincolata (3 punti);

b) enunciarne e dimostrarne il relativo teorema di convergenza (5 punti).

Dato il problema di minimizzazione vincolata $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = e^{x_1+x_2}$$

ed S dato dal quadrante positivo di $\mathbf{R}^2$,

c) scriverne la versione penalizzata (3 punti);

d) definirne opportunamente una funzione lagrangiana per il metodo di Uzawa (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciarne la nozione di consistenza (e suo ordine) per gli schemi ad un passo, e quella di zero-stabilitá per il caso generale (2+2 punti);

b) dimostrare che negli schemi ad un passo l'ipotesi di lipschitzianitá implica la zero-stabilitá (4 punti);

c) verificare l'ipotesi di lipschitzianitá per il metodo di Crank–Nicolson (2 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams (3 punti);

b) costruire il metodo di Adams esplicito a due passi (3 punti).

c) verificarne consistenza e zero-stabilitá (3+2 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) Messi i vincoli nella forma standard

$$-x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0,$$

una possibilità è quella di definire

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\left(x_1^-\right)^2 + \left(x_2^-\right)^2\right).$$

d) Sempre con la stessa definizione dei vincoli, si ha

$$L(x, \lambda) = e^{x_1+x_2} - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2.$$

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 08.06.12

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari enunciando i relativi risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti);

c) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 10 \\ -3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

dire se puó essere risolto con il metodo di Jacobi, ed in caso positivo quante iterazioni sono necessarie per ridurre la norma $\|\cdot\|_\infty$ dell'errore a 10^{-6} volte il suo valore iniziale (3 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (6 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la forma generale del polinomio di Newton e la formula delle differenze divise (6 punti);

b) data la seguente tabella di valori della funzione $f(x) = e^{-x^2}$,

x	$f(x)$
-1.0	0.3679
-0.5	0.7788
0.0	1.0
0.5	0.7788
1.0	0.3679

costruire la tavola delle differenze (indicando le perdite di precisione per sottrazione) ed il polinomio di Newton (4+2 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale delle quadrature Gaussiane (3 punti);

b) approssimare con la formula di Gauss–Legendre a quattro punti l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

(3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) La matrice del sistema non è a diagonale dominante, ma lo diventa se le righe vengono scambiate. In questo caso, si arriva alla matrice di iterazione

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

e, nella norma $\|\cdot\|_\infty$, il coefficiente di contrazione vale $\|B_j\|_\infty = 2/5$. Per ridurre l'errore iniziale del fattore richiesto, il numero di iterazioni k deve soddisfare la condizione $(2/5)^k \leq 10^{-6}$, cosa che avviene a partire da $k = 16$.

Esercizio 3.

b) Si ha, lavorando sempre con quattro decimali:

$$f[x_0, x_1] = 0.8218, \quad f[x_1, x_2] = 0.4424, \quad f[x_2, x_3] = -0.4424, \quad f[x_3, x_4] = -0.8218;$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = -0.3794, \quad f[x_1, x_2, x_3] = -0.8848, \quad f[x_2, x_3, x_4] = -0.3794;$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0.3369, \quad f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.3369;$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.3369.$$

In nessuna delle differenze divise vi è stata perdita di cifre significative per sottrazione.

Esercizio 4.

b) Con sette decimali, si ha $I_3(f, -\pi, \pi) = 3.7030936$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 08.06.12

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) enunciate le opportune ipotesi, dimostrare che il metodo di Newton soddisfa questo teorema generale (5 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza in n passi dei metodi CD per funzioni quadratiche (6 punti).

Esercizio 3. Descrivere i metodi del gradiente e del rilassamento con proiezione, ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per metodi ad un passo (6 punti);

b) data, al variare di $\theta \in [0,1]$, la famiglia di schemi numerici (detti θ–metodi)

$$u_{k+1} = u_k + h\big[\theta f(x_k, u_k) + (1-\theta) f(x_{k+1}, u_{k+1})\big]$$

determinarne il piú esplicitamente possibile la regione di stabilitá assoluta al variare di θ (5 punti);

c) dimostrare che tutti gli schemi di questa famiglia sono consistenti (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 4.

b) Per il problema modello $y' = \lambda y$, si ha

$$u_{k+1} = u_k + h\big[\theta\lambda u_k + (1-\theta)\lambda u_{k+1}\big],$$

ovvero

$$[1-(1-\theta)h\lambda]u_{k+1} = (1+\theta h\lambda)u_k.$$

Posto $h\lambda = z = x+iy$, la condizione $|u_{k+1}| \le |u_k|$ equivale a

$$|1-(1-\theta)z| \ge |1+\theta z|$$

che si può anche riscrivere come

$$(1-(1-\theta)x)^2 + (1-\theta)^2y^2 \ge (1+\theta x)^2 + \theta^2 y^2.$$

Con un po' di algebra, si arriva alla condizione

$$(1-2\theta)\left(\left(x - \frac{1}{1-2\theta}\right)^2 + y^2\right) \ge \frac{1}{1-2\theta}. \qquad (*)$$

Se $1-2\theta > 0$, ovvero se "prevale la parte implicita", la soluzione di $(*)$ è l'esterno di un disco centrato in $(\frac{1}{1-2\theta}, 0)$, ovvero lungo il semiasse reale positivo, e di raggio $\frac{1}{1-2\theta}$. Se $1-2\theta < 0$, ovvero se "prevale la parte esplicita", la disuguaglianza cambia segno e la soluzione di $(*)$ è l'interno di un disco centrato ancora in $(\frac{1}{1-2\theta}, 0)$, ovvero lungo il semiasse reale negativo, e di raggio $\frac{1}{2\theta-1}$. In entrambi i casi, per $\theta \to 1/2$ si ottiene come limite la regione di stabilità del metodo di Crank–Nicolson.

c) Basta osservare che, sostituita a u_k, u_{k+1} la soluzione esatta $y(x_k), y(x_{k+1})$, si ha

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + O(h),$$

ottenendo quindi

$$\theta f(x_k, y(x_k)) + (1-\theta)f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) = f(x_k, y(x_k)) + (1-\theta)O(h),$$

dopodiché la consistenza si riporta al caso esplicito.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 02.07.12

Esercizio 1.

a) Descrivere le strategie di ricerca parziale di Armijo–Goldstein e di Wolfe–Powell (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema generale di convergenza dei metodi di discesa in ricerca parziale o a passo fisso (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principi generali dei metodi Quasi-Newton, e costruire le formule di aggiornamento di Broyden (rango 1) e DFP (rango 2) (4 punti);

b) enunciare i principali risultati di convergenza dei metodi Quasi-Newton (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per approssimazioni penalizzate di problemi di minimizzazione vincolata (5 punti);

b) dare la versione penalizzata del problema $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = -\cos(x_1 + x_2),$$

ed S é l'intersezione tra il disco unitario centrato nell'origine e il semipiano ad ascisse positive. Ci si aspetta una soluzione unica per il problema originale e/o per quello penalizzato? (3 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi BDF (3 punti);

b) costruire il metodo BDF a due passi (4 punti).

c) supponendo di applicarlo al sistema differenziale lineare

$$y' = Ay,$$

scrivere esplicitamente il sistema lineare che va risolto ad ogni passo (2 punti).

Esercizio 3.

b) I due vincoli sono

$$-x_1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,$$

e quindi si può definire una funzione penalizzata nella forma

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = -\cos(x_1 + x_2) + \frac{1}{\varepsilon}\left((x_1^-)^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)^{+^2}\right).$$

Si noti che la funzione f non è strettamente convessa (assume valore costante sulle rette $x_1 + x_2 = cost$), e quindi non ci si aspetta un minimo unico anche se l'insieme S è convesso.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 04.07.12

Esercizio 1.

a) Descrivere l'algoritmo di Doolittle senza pivotazione (4 punti);

b) costruire la fattorizzazione di Doolittle della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e dire se il MEG con pivotazione parziale avrebbe fornito un risultato diverso per i fattori L ed U (4+1 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di bisezione per equazioni scalari e fornirne il diagramma di flusso o lo pseudocodice (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la maggiorazione di errore per l'interpolazione composita, nella sua forma piú generale (5 punti);

b) supponendo di approssimare con una interpolazione composita di grado $n = 1$ a passo costante H la funzione

$$f(x) = e^x$$

nell'intervallo $[0, 3]$, dire quale deve essere il massimo valore del passo H per tenere l'errore di interpolazione sotto a 10^{-2} su tutto l'intervallo (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule Gaussiane (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-3}^{1} |x| dx$$

con una formula di Gauss–Legendre a 5 nodi (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Tramite il MEG con pivotazione parziale si sarebbe ottenuta la stessa fattorizzazione: infatti la matrice è a diagonale dominante e non sarebbe stata sottoposta a scambi di righe.

Esercizio 3.

b) Utilizzando la maggiorazione di errore ottimale, si richiede che

$$\|f - \Pi_{1,H}\|_\infty \leq \frac{H^2}{8}\|f''\|_\infty \leq 10^{-2},$$

il che fornisce (dato che $\|f''\|_\infty \approx 20.09$) un massimo valore di H pari a

$$H_{max} = \left(\frac{8 \cdot 10^{-2}}{20.09}\right)^{1/2} \approx 0.0631,$$

corrispondente a 48 sottointervalli, ovvero 49 nodi.

Esercizio 4.

b) Con sette decimali, si ha $I_4(f, -3, 1) = 4.9171796$ (il valore esatto è 5).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 10.09.12

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari ed enunciarne i risultati di convergenza (3 punti);

b) dimostrare il risultato relativo al metodi di Richardson (5 punti);

c) dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare il valore del passo β nel metodo di Richardson in modo che la costante di contrazione del metodo nella norma $\|\cdot\|_2$ sia minima (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) Data l'equazione

$$\sin x + e^{-x} = 0,$$

determinare un intervallo $[a, b]$ per applicare il metodo delle corde nell'intorno della prima radice positiva, in modo che converga piú velocemente del metodo di bisezione (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) si costruisca la approssimazione di errore quadratico minimo nella forma $y = ae^{-x}$ per la tabella di punti

x_i	y_i
0	2.3
0.5	1.6
1	1.2
1.5	0.7
2	0.5
2.5	0.2

calcolando il valore del parametro a (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

c) I due autovalori della matrice A sono

$$\lambda_1 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

ed il valore ottimale β_{opt} del passo è quello per cui si ha

$$\max(|1-\beta_{opt}\lambda_1|, |1-\beta_{opt}\lambda_2|) = \min_\beta \max(|1-\beta\lambda_1|, |1-\beta\lambda_2|).$$

D'altra parte, poiché i due autovalori sono positivi, si può scrivere

$$|1-\beta\lambda_i| = \lambda_i \left|\beta - \frac{1}{\lambda_i}\right|$$

Data la struttura delle due funzioni di β, basta un sommario studio grafico per verificare che il massimo tra le due è minimo quando le due funzioni hanno lo stesso valore, ovvero

$$\lambda_1 \left|\beta_{opt} - \frac{1}{\lambda_1}\right| = \lambda_2 \left|\beta_{opt} - \frac{1}{\lambda_2}\right|,$$

e che, tra le varie soluzioni, si debba scegliere quella che soddisfa $\beta_{opt} \in [1/\lambda_2, 1/\lambda_1]$. Esplicitando quindi i moduli in questo intervallo, si ottiene

$$\lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \beta_{opt}\right) = \lambda_2 \left(\beta_{opt} - \frac{1}{\lambda_2}\right),$$

da cui $\beta_{opt} = 2/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Esercizio 2.

b) Si può scegliere ad esempio l'intervallo $[\pi, 4]$, per il quale si ha:

$$f(a) \approx 0.0432, \quad f(b) \approx -0.7385,$$

$$\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \approx -1.0981.$$

Poiché $f'(x) = \cos x - e^{-x}$ è crescente nell'intervallo $[a, b]$, si ha, sempre in questo intervallo,

$$f'(x) \in [f'(a), f'(b)] \approx [-1.04321, -0.00898],$$

e quindi anche per $g'(x) = 1 + 1.0981 \cdot f'(x)$ si ottiene

$$g'(x) \in [g'(a), g'(b)] \approx [-0.1456, 0.2621].$$

La costante di contazione è quindi $L_g \approx 0.2621 < 1/2$ e il metodo converge più velocemente del metodo di bisezione.

Esercizio 3.

b) Si ha, con sette decimali:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6065307 \\ 0.3678794 \\ 0.2231302 \\ 0.1353353 \\ 0.0820850 \end{pmatrix},$$

e di conseguenza $\Phi^t\Phi = 1.5780554$, e $\Phi^t y = 3.9521801$, da cui si ottiene $a = 2.5044623$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 13.09.12

Esercizio 1.

a) Enunciare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca parziale o passo fisso (6 punti);

b) dimostrare che per β abbastanza piccolo il metodo del gradiente a passo fisso ha convergenza lineare e calcolarne o stimarne la costante di contrazione (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi nonlineari e le sue varianti principali (4 punti);

b) Dato il sistema

$$\begin{cases} \sin x - 2\cos y = 1 \\ -3\sin x + \cos y = 2 \end{cases}$$

scrivere un metodo di Newton per la sua soluzione, senza ricorrere al calcolo di matrici inverse (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere le principali strategie duali di minimizzazione vincolata (3 punti).

Costruire una versione penalizzata del problema vincolato $\min_S f(x)$, con

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2}; \quad S = \{(x_1, x_2) \in R^2 : -1 \le x_1, x_2 \le 1\},$$

b) in modo che la funzione penalizzata sia C^1 (2 punti);

c) in modo che la funzione penalizzata sia C^2 (4 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale dei metodi di Runge–Kutta (3 punti);

b) scritto un metodo di RK generico a due stadi, calcolarne le condizioni di consistenza del secondo ordine (5 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Assumendo che la funzione $f(x)$ sia C^2 e con Hessiana $H_f(x)$ strettamente definita positiva, il metodo si può porre nella forma $x_{k+1} = T(x_k)$, con

$$T(x) = x - \beta \nabla f(x).$$

Per avere una contrazione a secondo membro, la sua matrice Jacobiana $J_T(x)$ deve soddisfare in un intorno del minimo la condizione $L_T = \sup_x \|J_T(x)\| < 1$ per una qualche norma matriciale. D'altra parte, $J_T(x) = I - \beta H_f(x)$, e tenendo conto che gli autovalori di H_f sono positivi e limitati, lavorando nella norma $\|\cdot\|_2$ si possono applicare gli stessi argomenti della dimostrazione di convergenza del metodo di Richardson.

Esercizio 2.

b) Si tratta di mettere il metodo di Newton in forma di sistema lineare, ovvero, indicando la approssimazione generica con (x_k, y_k):

$$\begin{pmatrix} \cos x_k & 2\sin y_k \\ -3\cos x_k & -\sin y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_k - 2\cos y_k - 1 \\ -3\sin x_k + \cos y_k - 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.

b, c) Una possibile funzione penalizzata per il problema è data da

$$f_\varepsilon(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2} + \frac{1}{\varepsilon}\left((|x_1| - 1)^{+\alpha} + (|x_2| - 1)^{+\alpha} \right),$$

in cui la scelta usuale $\alpha = 2$ garantisce che il gradiente del termine di penalizzazione si annulli su ∂S. D'altra parte, in questa forma la derivata seconda nella direzione normale al bordo di S è zero all'interno e costante all'esterno, risultando quindi discontinua. Per analizzare meglio la questione, isoliamo il vincolo unidimensionale $x \le 1$. Per il termine di penalizzazione si ha

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ (x-1)^\alpha & x > 1 \end{cases}$$

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \alpha(x-1)^{\alpha-1} & x > 1 \end{cases}$$

$$H''(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \alpha(\alpha-1)(x-1)^{\alpha-2} & x > 1 \end{cases}$$

Come è facile verificare, essendo tutte le derivate di H nulle per $x < 1$, una maggiore regolarità di H richiede di incrementare l'esponente α: in particolare, per $\alpha > 1$ si ottiene $H \in C^1$ (e quindi $f_\varepsilon \in C^1$) e per $\alpha > 2$ si ottiene $H \in C^2$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 28.01.13

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza relativo al metodo di Jacobi (5 punti);

b) dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

verificare se soddisfa le condizioni necessarie e/o sufficienti per la convergenza dei metodi di Jacobi, Gauss–Seidel, Richardson (2+2+3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine si convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) Esporre e motivare le principali varianti del metodo di Newton (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle approssimazioni per interpolazione in una base generica (6 punti);

b) supponendo di interpolare una funzione con un polinomio di terzo grado con nodi $x_0, \ldots, x_3$ equispaziati a distanza h, calcolare la costante di Lebesgue *relativa al solo intervallo centrale* $[x_1, x_2]$ (3 punti).

Esercizio 4. Costruire la formula di quadratura di Simpson e derivarne la sua versione composita (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Iniziamo con il metodo di Jacobi. La condizione sufficiente di dominanza diagonale non è soddisfatta. Per quanto riguarda la condizione necessaria e sufficiente, la matrice di iterazione vale

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix},$$

ed ha autovalori $\lambda = \pm 2i/\sqrt{5}$: la condizione di convergenza è perciò soddisfatta. Per quanto riguarda i metodi di Gauss–Seidel e Richardson, basta osservare che la matrice A è definita positiva. In entrambi i casi si ottiene quindi convergenza (nel metodo di Richardson, per β abbastanza piccolo).

Esercizio 3.

b) Senza perdita di generalità, possiamo porre $h = 1$ e considerare nodi simmetrici $x_0 = -3/2$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/2$. Data la simmetria, la funzione di Lebesgue ha un estremo in $x = 0$. Questo estremo è necessariamente unico: infatti se ci fossero altri estremi, sempre per la simmetria, dovrebbero essere in numero dispari, ma nell'intervallo considerato la funzione di Lebesgue è un polinomio di grado ≤ 3 e quindi può avere al più due estremi. Inoltre, è necessariamente un punto di massimo, poiché $\Lambda(x) \geq 1$, e $\Lambda(x_1) = \Lambda(x_2) = 1$. Per maggiorare la funzione di Lebesgue, basta quindi calcolare $\sum_j |L_j(0)|$, e, ancora per simmetria, $\Lambda_3 = \sum_j |L_j(0)| = 2(|L_0(0)| + |L_1(0)|)$. Si ha:

$$L_0(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\left(x - \frac{3}{2}\right), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

da cui $|L_0(0)| = 1/16$, $|L_1(0)| = 9/16$, e finalmente $\Lambda_3 = 5/4$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 28.01.13

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle corde in dimensione n (5 punti);

b) dato il sistema nonlineare

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2 = \sin x_1 \end{cases}$$

e scelto un adeguato punto iniziale, scrivere un metodo delle corde per trovarne la soluzione positiva (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza dei metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) dimostrare che il metodo di Newton soddisfa le ipotesi del teorema generale (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad una passo (6 punti);

b) dopo aver scritto un metodo generico di Runge–Kutta a due stadi, calcolarne le condizioni di consistenza del secondo ordine (5 punti).

Esercizio 4. Enunciare la condizione delle radici e verificare che il metodo multistep del punto medio la soddisfa (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) La soluzione nel quadrante positivo è nell'intorno della intersezione tra la circonferenza (prima equazione) e la bisettrice del quadrante, ovvero vicino al punto $x_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. La Jacobiana di F vale

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -\cos x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolandola con sei decimali in x_0 si ha

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\cos(1/\sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.414214 & 1.414214 \\ -0.760245 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_F(x_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.401709 & -0.568103 \\ 0.305397 & 0.568103 \end{pmatrix}.$$

Il metodo richiesto ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.401709 & -0.568103 \\ 0.305397 & 0.568103 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {x_1^{(k)}}^2 + {x_2^{(k)}}^2 - 1 \\ x_2^{(k)} - \sin x_1^{(k)} \end{pmatrix}.$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 25.03.13

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi nonlineari e le sue varianti a compessitá ridotta (5 punti);

b) dato il seguente sistema nonlineare:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 - \frac{1}{2} \arctan x_2 = 0 \end{cases}$$

scrivere un metodo delle corde, a partire da un adeguato punto iniziale x_0, per la ricerca della radice positiva, e esaminarne la convergenza (3+4 punti).

Esercizio 2.

a) Presentare le principali strategie di ricerca unidimensionale esatta in uso nei metodi di discesa (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo del gradiente coniugato e le sue varianti principali (2 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza in n passi per i metodi di direzioni coniugate (6 punti);

c) dimostrare che in un metodo di gradiente in ricerca esatta applicato alla funzione quadratica in $\mathbf{R}^2$

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

le direzioni $-\nabla f(x_0)$ e $x_2 - x_0$ sono coniugate (5 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 05.04.13

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss e le principali strategie di pivotazione (3 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU il fattore triangolare inferiore é formato dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Richardson (5 punti).

Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

b) dire per quale intervallo di valori reali di β il metodo converge in base alla condizione necessaria e sufficiente (4 punti);

c) trovare (al variare di β) la migliore costante di contrazione nella norma $\|\cdot\|_1$ (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i principali metodi per la soluzione numerica di equazioni scalari ed enunciarne i relativi risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

c) data l'equazione

$$x^3 - 4x + 1 = 0,$$

individuare un intervallo $[a, b]$ su cui applicare il metodo delle corde per calcolare la radice intermedia (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 2.

b) La matrice di iterazione è data da:

$$B_R = \begin{pmatrix} 1-2\beta & \beta \\ -\beta & 1-3\beta \end{pmatrix},$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + (5\beta - 2)\lambda + 7\beta^2 - 5\beta + 1 = 0$$

ed ha le soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2}\beta + 1 \pm i\beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La condizione $|\lambda_{1,2}| < 1$ (che in realtà è più comodo utilizzare nella forma $|\lambda_{1,2}|^2 < 1$) si scrive quindi

$$7\beta^2 - 5\beta \le 0$$

e finalmente la condizione di convergenza è $0 \le \beta \le 5/7$.

c) Dando per buono che $\beta > 0$ (indipendentemente dal punto precedente: infatti, se $\beta < 0$, gli elementi sulla diagonale di B_R sono > 1 e lo schema non può convergere), si ha, per la prima colonna della matrice:

$$|1-2\beta| + \beta = \begin{cases} 1-\beta & \text{per } \beta \le 1/2 \\ 3\beta - 1 & \text{per } \beta \ge 1/2 \end{cases}$$

e per la seconda:

$$|1-3\beta| + \beta = \begin{cases} 1-2\beta & \text{per } \beta \le 1/3 \\ 4\beta - 1 & \text{per } \beta \ge 1/3 \end{cases}.$$

D'altra parte, la costante di contrazione richiesta vale

$$L = \max(|1-2\beta| + \beta, |1-3\beta| + \beta).$$

Considerando anche la dipendenza da β, per $\beta \le 1/3$ si ha quindi $L = 1 - \beta$, mentre per $\beta \ge 1/2$, si ottiene $L = 4\beta - 1$. Per $1/3 \le \beta \le 1/2$ si ha

$$L = \max(4\beta - 1, 1 - \beta) = \begin{cases} 1-\beta & \text{per } \beta \le 2/5 \\ 4\beta - 1 & \text{per } \beta \ge 2/5 \end{cases}.$$

Il minimo si ottiene quindi per $\beta = 2/5$ e vale $L_{opt} = 3/5$.

Esercizio 3.

c)

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 21.05.13

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi duali per la soluzione di problemi di minimizzazione vincolata ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema convergenza relativo al metodo di penalizzazione (5 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza dei metodi ad un passo (7 punti);

b) applicarlo verificando ordine di consistenza e zero-stabilitá per il metodo di Crank–Nicolson (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i metodi a piú passi, darne alcuni esempi di costruzione ed enunciarne i principali risultati teorici (5 punti).

Dato un metodo nella forma

$$u_{k+1} = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})\right)$$

b) fornire una scelta dei parametri a_0 e a_1 per cui lo schema é del secondo ordine e studiarne consistenza, zero-stabilitá e stabilitá assoluta (6 punti);

c) dire se al variare di a_0 e a_1 é possibile ottenere uno schema del terzo ordine (3 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 27.05.13

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione e derivarne le stime di errore principali (6+2 punti);

b) considerata la funzione $f(x) = \arctan x$ nell'intervallo $[-3, 3]$, maggiorare l'errore per una interpolazione a nodi equidistanti di grado $n = 3$ (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di approssimazione per errore quadratico minimo (4 punti);

b) data la tabella di punti

x_i	y_i
-4	7.3
-3.5	6.0
-3	7.1
-2	3.5
-0.5	2.0
1.5	3.2
3.5	1.5

si costruisca la retta di errore quadratico minimo (5 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere la costruzione delle formule di Newton–Cotes semplici e composite (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza per le formule composite (6 punti);

c) calcolare i pesi di una formula di NC aperta a quattro nodi (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 10.06.13

Esercizio 1.

a) Descrivere il Metodo di Eliminazione di Gauss con pivotazione (4 punti);

b) Dimostrare che nella fattorizzazione LU la matrice L é formata dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di caratterizzazione dell'ordine di convergenza per i metodi iterativi nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$ ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

Esercizio 3.

a) Dimostrare la costruzione del polinomio di Newton e la formula delle differenze divise (6 punti);

b) calcolare la tabella delle differenze per la funzione $f(x) = e^{-x}$ sui nodi (equidistanti) $x_0 = 0, \ldots, x_4 = 4$, con quattro cifre decimali e segnalando eventuali perdite di precisione per cancellazione (3 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti);

b) approssimare

$$\int_0^5 e^{-x} dx$$

con una formula di Gauss–Legendre a tre punti (2 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 14.06.13

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) esporre le principali strategie di costruzione delle direzioni di ricerca, mettendone in luce i rispettivi pregi e difetti (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di ricerca parziale di Armijo–Goldstein e fornirne una pseudocodifica (3 punti);

b) restringendosi al caso di funzioni quadratiche, dare le condizioni sui coefficienti σ_1 e σ_2 in modo che il passo ottenuto per ricerca esatta sia sempre all'interno dell'intervallo accettabile per la ricerca parziale di A–G (4 punti).

Esercizio 3. Descrivere gli algoritmi primali di rilassamento e gradiente con proiezione (3 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi BDF ed enunciarne i principali risultati teorici (3 punti);

b) dimostrare il teorema di consistenza (6 punti);

c) costruire il metodo BDF a tre passi (5 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 15.07.13

Esercizio 1.

a) Dimostrare il teorema di convergenza del metodo di Richardson (4 punti);

c) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

dire qual é il valore del passo β che minimizza il raggio spettrale della matrice di iterazione (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) data l'equazione

$$\sin \sqrt{x} = 0,$$

determinare un intervallo iniziale opportuno per calcolare con il metodo delle corde la prima radice strettamente positiva (4 punti).

Esercizio 3. Dopo aver introdotto il problema dell'interpolazione polinomiale, dimostrare esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore basandosi sulla forma di Lagrange (2+6 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere le principali strategie di integrazione numerica (3 punti);

b) dimostrare il teorema sul gradi di precisione delle formule Gaussiane (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 23.07.13

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di Newton per la soluzione di sistemi nonlineari e darne le principali varianti (4 punti);

b) enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde n-dimensionale (5 punti);

c) dato il sistema

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_2^4 = 3 \\ x_1^2 + 20x_2^2 = 1 \end{cases}$$

scrivere esplicitamente il metodo di Newton, senza inversione di matrice (2 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza dei metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di penalizzazione (5 punti);

b) dare la versione penalizzata del problems $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2,$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2\}$$

(2 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia di approssimazione ad un passo per EDO, fornendone gli esempi piú importanti ed enunciando il teorema di convergenza (4 punti);

b) scritto un generico metodo di Runge–Kutta a due stadi, derivare le condizioni sui coefficienti che garantiscono che il metodo sia del secondo ordine (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 16.09.13

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, fornendone le condizioni di convergenza (4 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + \alpha x_2 = 1 \end{cases}$$

dire (in modo se possibile ottimale) qual é l'insieme di variabilitá del parametro α per cui si ha convergenza del metodo di Gauss–Seidel (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti);

b) data l'equazione

$$\sin\sqrt{x} = 0,$$

determinare un intervallo iniziale opportuno per calcolare con il metodo di bisezione la prima radice strettamente positiva e dire quante iterazioni sono necessarie per avere un errore inferiore a 10^{-5}(3 punti).

Esercizio 3. Dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore e la formula delle differenze divise (6 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare il teorema di convergenza delle formule di integrazione di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) calcolare i pesi della formula aperta a due punti (3 punti);

c) approssimare l'integrale

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

con la formula di Simpson composita, suddividendo l'intervallo di integrazione in 4 sottointervalli (3 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Partendo dalle condizioni sufficienti, si ha dominanza diagonale per $|\alpha| > 1$, e positività della matrice se il determinante è positivo, ovvero per $\alpha > 1/2$. Mettendo insieme le condizioni sufficienti, si ottiene quindi l'insieme di convergenza

$$\{\alpha < -1\} \cup \{\alpha > 1/2\}.$$

La condizione necessaria e sufficiente richiede per prima cosa di calcolare la matrice di iterazione

$$B_{GS} = -(D+E)^{-1}F = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Poiché poi i due autovalori della matrice B_{GS} sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2\alpha}$, si ha convergenza se e solo se $|\alpha| > 1/2$.

Esercizio 2.

b) Poiché la soluzione richiesta è $\bar{x} = \pi^2 \approx 10$, si può scegliere ad esempio l'intervallo inizale $[a_0, b_0] = [9, 11]$ in cui, come è facile verificare, la funzione $f(x) = \sin\sqrt{x}$ cambia segno. L'ampiezza dell'intervallo di bisezione vale

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 2^{1-k}$$

e l'accuratezza richiesta si ottiene alla quindicesima iterazione.

Esercizio 4.

c) Si ha, con sette decimali, $I_{2,4}(f, 0, 2) = 0.8820655$.

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 20.09.13

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca parziale o a passo fisso (6 punti);

b) dimostrare che, nel caso di funzioni quadratiche con Hessiana positiva, il metodo del gradiente a passo fisso é una contrazione per β sufficientemente piccolo (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere le principali strategie di scelta delle direzioni di ricerca nei metodi di discesa, discutendo nei vari casi la possibilitá di utilizzarle nelle modalitá di passo fisso o di ricerca parziale (4 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i metodi di penalizzazione e di Uzawa ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) dato il problema di minimizzazione vincolata $\min_S f(x)$, con

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2,$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \leq 2, x_1 \geq x_2^2\},$$

costruirne la Lagrangiana $L(x, \lambda)$ ed una possibile funzione penalizzata f_ε (2+2 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams e fornirne gli esempi piú semplici (4 punti);

b) Enunciare la condizione delle radici e dimostrare che é sempre soddisfatta nei metodi di Adams (4 punti);

c) Costruire il metodo di Adams–Moulton a due passi (4 punti).

Soluzioni

Esercizio 1.

b) Si veda, ad esempio, l'esercizio 1 del 13.09.12.

Esercizio 3.

b) Mettendo i vincoli nella forma

$$x_1 - 2 \leq 0, \quad x_2^2 - x_1 \leq 0,$$

la Lagrangiana si scrive nella forma

$$L(x, \lambda) = x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1 - 2) + \lambda_2(x_2^2 - x_1),$$

e una possibile funzione penalizzata è

$$f_\varepsilon(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left((x_1 - 2)^{+2} + (x_2^2 - x_1)^{+2}\right).$$

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 31.10.13

Esercizio 1.

a) Descrivere i metodi di fattorizzazione di Doolittle e Cholesky (3 punti).

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

b) costruirne le fattorizzazioni di Doolittle e Cholesky (2+2 punti);

c) calcolare il numero di condizionamento $K_\infty(A)$ (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Richardson (5 punti);

c) data la matrice $(*)$, fornire la condizione di convergenza sul passo β e, scelto un passo che la soddisfi, dire quante iterazioni sono necessarie per avere un errore dell'ordine della precisione di macchina in aritmetica `float` (2+2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema generale sull'ordine dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) data l'equazione

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$$

scrivere un metodo di Newton per la sua soluzione ed approssimarne la (unica) radice positiva effettuando tre iterazioni (4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 03.01.14

Esercizio 1.

a) Dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore e la formula delle differenze divise (6 punti).

b) Data la funzione

$$f(x) = \arctan x$$

ed i nodi $\{x_0, \dots, x_4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, costruire la tabella delle differenze (con quattro cifre decimali e segnalando la perdita di cifre significative) ed il polinomio di Newton di grado $n = 4$ (3+1 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione (6 punti);

b) derivarne le principali maggiorazioni di errore per l'interpolazione semplice e composita (2 punti);

c) supponendo di interpolare a nodi equidistanti e con grado $n = 1$ a tratti la funzione

$$f(x) = e^{-x}$$

su $[a, b] = [0, 5]$, dire quanti nodi sono necessari per ottenere un errore di interpolazione minore di 10^{-3} (3 punti);

c) sempre utilizzando nodi equidistanti, ed approssimando

$$\int_0^5 e^{-x} dx$$

con il metodo dei trapezi composito, dire quanti nodi sono necessari per ottenere un errore di integrazione minore di 10^{-3} (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema generale sul grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx$$

con una formula di Gauss–Legendre a cinque nodi (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 17.01.14

Esercizio 1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ \tan x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

a) scrivere il metodo di Newton (nella forma senza inversione di matrice) per la sua soluzione (2 punti);

b) localizzare approssimativamente la soluzione esistente nel primo quadrante, e fornire un metodo di Newton semplificato per la sua soluzione (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi di discesa in ricerca esatta (6 punti);

b) dimostrare che il metodo di Newton soddisfa le ipotesi del teorema generale (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di penalizzazione (5 punti);

b) dare la versione penalizzata del problema $\min_S f(s)$, con

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^4$$

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq -2\}$$

(2 punti);

c) scrivere la funzione Lagrangiana associata al problema vincolato precedente (2 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (6 punti);

b) scrivere la forma generale dei metodi di Runge–Kutta espliciti e fornirne un esempio (2 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 20.01.14

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per sistemi lineari ed enunciarne le condizioni (necessarie e/o sufficienti) di convergenza (3 punti);

b) dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 1, \end{cases}$$

studiare la convergenza rispettivamente per i metodi di Jacobi, Gauss–Seidel e Richardson (in quest'ultimo caso, fornendo eventualmente anche una condizione sul passo β) (2+2+3 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare esistenza ed unicitá del polinomio interpolatore basandosi sulla forma di Lagrange (6 punti);

b) scrivere la base di Lagrange associata ai nodi $\{0, 1, 2, 3\}$ (2 punti);

c) definire la funzione di Lebesgue associata alla base di Lagrange e, con riferimento alla base del punto precedente, darne l'espressione esplicita per $x \in [0, 1]$ (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le formule di integrazione di Newton–Cotes composite (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 14.02.14

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di eliminazione di Gauss (2 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU il fattore triangolare inferiore é formato dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo di bisezione (5 punti);

b) data l'equazione

$$x^5 - x^3 + 1 = 0,$$

e supponendo di voler calcolare la radice di valore piú piccolo, fornire un intervallo iniziale per applicare il metodo di bisezione e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore minore di 10^{-4} (4 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione e le principali maggiorazioni di errore che ne derivano (6+2 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la costruzione delle formule di Newton–Cotes semplici e composite (3 punti);

b) calcolare i pesi della formula di Simpson (3 punti);

c) approssimare l'integrale

$$\int_0^{10} xe^{-x}dx$$

con una formula di Simpson composita, usando 5 sottointervalli (3 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 04.04.14

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza dei metodi ad un passo (7 punti);

b) dare la struttura generale dei metodi di Runge–Kutta espliciti e fornirne un esempio (2 punti).

c) calcolare le condizioni di consistenza di primo e secondo ordine per i metodi di Runge–Kutta a due stadi (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i metodi a piú passi lineari e fornirne un esempio (2 punti);

b) esporre la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams e costruire il metodo di Adams esplicito a due passi (2+3 punti);

c) verificarne l'ordine di consistenza e la zero-stabilitá (3+2 punti);

d) calcolare il polinomio di stabilitá assoluta $P(\zeta)$ e dire se il punto $z = -1/2$ é all'interno o all'esterno della regione di stabilitá assoluta (4 punti).

Esercizio 3. Calcolare l'ordine di consistenza del metodo a piú passi

$$u_{k+1} = u_{k-2} + \frac{3h}{2}[f(u_{k-1}) + f(u_k)]$$

(4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 28.05.14

Esercizio 1. Dato il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

a) dopo aver definito opportunamente consistenza e stabilitá, enunciare il teorema generale di convergenza per problemi lineari stazionari (5 punti);
b) scrivere il metodo alle differenze per la sua soluzione e verificarne la consistenza (1+3 punti);
c) dimostrare che il metodo possiede gli autovalori

$$\lambda_k = \frac{2}{\Delta x^2}(\cos(k\pi x) - 1)$$

(per $k = 1, \ldots, N$, con $N =$ numero dei nodi) e dedurre da ció la stabilitá nella norma $\| \cdot \|_2$ (5 punti).

Esercizio 2. Dato il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

a) formulare una sua approssimazione in forma di Galerkin (3 punti);
b) calcolare esplicitamente gli elementi delle matrici di rigiditá e di massa per una discretizzazione ad elementi finiti $\P_1$ a passo costante h in una dimensione (6 punti).

Esercizio 3.
a) Supponendo $f(x) < 0$, scrivere il metodo upwind per l'equazione

$$u_t + f(x)u_x = 0$$

supponendo di lavorare su una griglia unidimensionale uniforme infinita (2 punti);
b) dimostrare la consistenza dello schema (3 punti);
c) dare la condizione di monotonia sullo schema e verificare che implica la stabilitá nella norma $\| \cdot \|_\infty$ (3 punti);
d) dato un campo di trasporto con due componenti $f_1, f_2 > 0$, e sempre nell'ipotesi di una griglia uniforme ed infinita, scrivere lo stesso schema per il problema bidimensionale

$$u_t + f_1(x)u_{x_1} + f_2(x)u_{x_2} = 0$$

(3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 09.06.14

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, fornendone le condizioni di convergenza (4 punti);

c) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + \alpha x_2 = 1 \end{cases}$$

dire (in modo se possibile ottimale) qual é l'insieme di variabilitá del parametro α per cui si ha convergenza del metodo di Jacobi (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) dimostrare che un metodo nella forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha f(x_k) \tag{$*$}$$

non puó essere una contrazione nell'intorno di una radice multipla (2 punti);

c) ponendo $f(x) = x^2$, $x_0 \in (0, 1)$ ed $\alpha = 1$, dimostrare che $(*)$ genera ugualmente una successione (limitata, monotona e) convergente all'unica radice $\bar{x} = 0$ (4 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione per funzioni regolari (6 punti);

b) maggiorare, limitandosi all'intervallo tra i due nodi centrali, l'errore di una interpolazione di terzo grado della funzione

$$f(x) = \sin 2x,$$

supponendo di lavorare a nodi equidistanti con passo h (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 16.06.14

Esercizio 1.
a) Descrivere i metodi ad un passo espliciti ed impliciti per la soluzione di EDO e fornire gli esempi principali (3 punti);
b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (6 punti).

Esercizio 2.
a) Dopo aver fornito la struttura generale dei metodi a piú passi lineari, enunciare il criterio delle radici (3 punti);
b) descrivere la costruzione dei metodi di Adams e verificare che soddisfano necessariamente il criterio delle radici (4 punti).

Esercizio 3. Costruire (in una dimensione spaziale) le formule alle differenze simmetriche per le derivate prima e seconda, e dimostrare che hanno il secondo ordine di consistenza (4+4 punti).

Esercizio 4.
a) Descrivere la costruzione del metodo upwind per l'equazione del trasporto (3 punti);
b) calcolarne le condizioni di monotonia nel caso unidimensionale a coefficienti costanti (3 punti);
c) verificare che la condizione CFL porta agli stessi vincoli sui passi di discretizzazione (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 12.09.14

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di eliminazione di Gauss (2 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU il fattore triangolare inferiore é formato dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, ed applicarlo al metodo di Newton (5+2 punti);

b) data l'equazione

$$x^5 - x^2 + x + 1 = 0,$$

e supponendo di voler calcolare la radice di valore piú grande, scrivere il metodo di Newton per la sua soluzione e fornire un valore della approssimazione iniziale che porti a convergenza monotona, motivando la scelta (2+2 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le interpolazioni in una base generica (6 punti).

Esercizio 4.

a) calcolare i pesi della formula di newton–Cotes chiusa a quattro punti (3 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^{12} xe^{-x} dx$$

con la versione composita della stessa formula, usando 4 sottointervalli (4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 11.11.14

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione LU di una matrice ed il suo uso nella soluzione di sistemi lineari (3 punti);

b) dimostrare che il fattore triangolare inferiore è formato dai moltiplicatori (6 punti);

c) data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

calcolarne i fattori triangolari e (come prodotto dei numeri di condizionamento dei fattori) il condizionamento finale del problema fattorizzato, per la fattorizzazione LU non pivotata (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti).

Dato un sistema lineare con la matrice del punto 2.c, dire se possono essere applicati

b) il metodo di Richardson, ed in caso positivo con quale valore massimo del passo β (3 punti);

c) il metodo di Jacobi, ed in caso positivo con quale costante di contrazione (3 punti);

Esercizio 3.

a) Descrivere il metodo di bisezione per la soluzione di equazioni scalari e dimostrarne la convergenza (2+5 punti);

b) data l'equazione

$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

fornire un intervallo adeguato a calcolare per bisezione la radice più grande, e dire quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore dell'ordine della precisione di macchina in aritmetica `float` (3 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 22.12.14

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di rappresentazione dell'errore di interpolazione per funzioni regolari e derivarne le maggiorazioni di errore principali (6+2 punti);

Data la funzione

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

b) maggiorare l'errore di una interpolazione di terzo grado in $[0, 4]$ (2 punti);

c) dire quanti nodi sono necessari perché un interpolazione composita di grado $n = 1$ abbia nello stesso intervallo un errore uniforme minore di 10^{-3} (3 punti).

Esercizio 2.

a) Definire la funzione di Lebesgue e mostrare il suo ruolo nello studio della stabilità e convergenza delle appossimazioni per interpolazione (4 punti);

b) calcolare la costante di Lebesgue sull'intervallo $[-2, 2]$ per una interpolazione costruita sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ *(Suggerimento: usare la simmetria dei nodi)* (5 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^4 e^{-x} \sin x dx$$

con una formula Gaussiana a 4 nodi (4 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 14.01.15

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di eliminazione di Gauss (2 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU il fattore triangolare inferiore é formato dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle corde (5 punti);

b) data l'equazione

$$\sin \frac{1}{x} = 0,$$

e supponendo di voler calcolare la soluzione di valore piú grande, fornire un intervallo iniziale per applicare il metodo delle corde e stimare la costante di contrazione del metodo (4 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la forma di Newton del polinomio interpolatore (6 punti);

b) calcolare la tabella delle differenze della funzione $f(x) = e^{-x}$ relativa ai cinque nodi $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$ e $x_4 = 1$, con tre decimali ed indicando quali differenze divise presentino perdita di cifre significative per sottrazione (4 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare il grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} e^{-x} dx$$

con una formula di Gauss–Legendre a due punti (2 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 14.01.15

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (6 punti);

b) Definire la regione di stabilitá assoluta di uno schema ad un passo, e calcolarla esplicitamente per i metodi di Eulero esplicito ed implicito (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams e dimostrarne l'ordine di consistenza (2+4 punti);

b) costruire il metodo di Adams implicito ad un passo (2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare la condizione di Courant–Friedrichs–Levy e motivare la sua necessitá (3 punti);

b) costruire il dominio di dipendenza numerico per lo schema upwind applicato all'equazione del trasporto a coefficienti costanti (2 punti);

c) definire la condizione di monotonia per uno schema e dimostrare che nel caso del punto precedente coincide con la condizione CFL (2+2 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il lemma di Céa per approssimazioni variazionali di equazioni ellittiche (5 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 13.02.15

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di fattorizzazione di Doolittle e derivarne il metodo di Cholesky (3+2 punti);

b) fattorizzare con il metodo di Cholesky la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo di bisezione (5 punti);

b) data l'equazione

$$x^3 + x^2 - 1 = 0,$$

e supponendo di voler calcolare la radice più grande, trovare un intervallo iniziale opportuno per applicare il metodo di bisezione, e dire quante iterazioni sono necessarie perché l'errore sulla soluzione $\bar{x}$ scenda sotto 10^{-6}(3 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare la formula di rappresentazione per l'errore di interpolazione (6 punti);

b) calcolare quanti nodi sono necessari per approssimare in $[0, 5]$ la funzione

$$f(x) = e^{-x}$$

con una interpolazione composita di grado $n = 1$ a nodi equidistanti, in modo che l'errore di interpolazione non superi 10^{-3} (3 punti).

Esercizio 4.

a) Dimostrare il teorema di convergenza delle formule di Newton–Cotes composite (6 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^5 e^{-x} dx$$

con una formula di Simpson composita su $m = 3$ sottointervallli (2 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 09.04.15

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito le nozioni di consistenza, zero-stabilità e convergenza, enunciare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (3 punti);

b) Dimostrare che nei metodi ad un passo la condizione di lipschitzianità implica la zero-stabilità (3 punti);

c) calcolare le condizioni di consistenza di primo e secondo ordine per i metodi di Runge–Kutta a due stadi (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i metodi a più passi lineari e fornirne un esempio (2 punti);

b) enunciare la condizione delle radici (2 punti);

c) esporre la strategia generale di costruzione dei metodi BDF e costruire il metodo BDF a due passi (2+3 punti);

d) verificarne l'ordine di consistenza e la zero-stabilità (3+2 punti);

e) calcolare il polinomio di stabilità assoluta $P(\zeta)$ e dimostrare che tutto il semiasse reale negativo è all'interno della regione di stabilità (4 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire un metodo predictor–corrector utilizzando un predictor di Eulero esplicito in un metodo implicito BDF2 (2 punti);

b) calcolarne l'ordine di consistenza dello schema così costruito in caso si effettui *una sola iterazione* di correzione (2 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 08.06.15

Esercizio 1.

a) Definire adeguatamente le nozioni di consistenza e stabilità per approssimazioni alle differenze dell'equazione di Poisson, e dimostrarne la convergenza (5 punti);

b) dimostrare l'ordine di consistenza del rapporto incrementale secondo centrato (4 punti);

c) dimostrare che l'approssimazione dell' equazione di Poisson unidimensionale definita da

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} = f_j + \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{12h^2}$$

ha il quarto ordine di consistenza (5 punti) (*Suggerimento*: usare la relazione tra le derivate della f e le derivate della u)

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale del metodo delle linee ed applicarlo alla equazione del calore in una dimensione spaziale, con condizioni di Dirichlet omogenee o condizioni periodiche (3 punti);

b) calcolare gli autovalori dello schema semi-discreto ottenuto con le condizioni periodiche, e dire con quali discretizzazioni temporali (e rispettive relazioni tra i passi h e k) può essere accoppiato (4 punti);

c) nel caso si utilizzi il metodo di Eulero implicito, scrivere esplicitamente il sistema lineare da risolvere ad ogni passo (2 punti).

Esercizio 3.

a) Definire la monotonia di uno schema per equazioni evolutive (3 punti);

b) costruire attraverso il metodo delle linee lo schema "upwind" per l'equazione del trasporto (con condizioni periodiche), e dimostrane la condizione di monotonia (4 punti);

c) calcolare gli autovalori dello schema semi-discreto ottenuto con la differenza prima centrata, e dire con quali discretizzazioni temporali si ottiene uno schema stabile (5 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 15.06.15

Esercizio 1.

a) Descrivere la strategia di approssimazione ad un passo per EDO, fornendone gli esempi più importanti ed enunciando il teorema di convergenza (4 punti);

b) scritto un generico metodo di Runge–Kutta a due stadi, derivare le condizioni sui coefficienti che garantiscono che il metodo sia del secondo ordine (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams, ed applicarla per costruire il metodo esplicito a due passi (2+3 punti);

b) verificare che il metodo così costruito soddisfa la condizione della radici (2 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare le nozioni di consistenza, stabilità e convergenza di uno schema per equazioni evolutive, e dimostrare il teorema di convergenza generale (6 punti);

b) dimostrare (in una norma a scelta) consistenza e stabilità dello schema "upwind" per l'equazione del trasporto a coefficienti costanti (2+3 punti).

Esercizio 4. Calcolare il dominio di dipendenza numerico per il metodo "upwind" e dimostrare sotto quale vincolo è soddisfatta la condizione CFL (5 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 06.07.15

Esercizio 1.

a) Descrivere la strategia di approssimazione ad un passo per EDO, fornendone gli esempi più importanti (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi BDF, ed esporre i risultati principali su questa classe di schemi (2+2 punti);

b) calcolare la regione di stabilità assoluta del metodo di Eulero implicito (2 punti);

c) indicare il più esplicitamente possibile le tecniche esatte e/o iterative con cui si può calcolare la soluzione ad ogni passo, nel caso specifico del metodo di Eulero implicito (2 punti).

Esercizio 3.

a) Data l'equazione di Poisson unidimensionale con condizioni di Dirichlet omogenee, costruire una approssimazione basata sulla differenza seconda e dimostrarne la consistenza (2+3 punti);

b) definire una opportuna nozione di stabilità, dimostrarne la sufficienza per la convergenza dello schema, e dimostrare (in una norma a scelta) che sussiste nel caso in questione (2+2+4 punti).

Esercizio 4. Data la equazione del trasporto a coefficienti variabili

$$u_t + f(x)u_x = g(x)$$

(con $x \in \mathbf{R}$), scrivere il metodo "upwind" per la sua approssimazione e dimostrare la relativa condizione di monotonia (4 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 11.01.16

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di fattorizzazione di Doolittle e derivarne il metodo di Cholesky (3+2 punti);

b) dimostrare che nella fattorizzazione LU il fattore triangolare inferiore è costituito dai moltiplicatori (6 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo delle corde (5 punti).

Esercizio 3.

a) Dimostrare l'unicità del polinomio interpolatore (4 punti);

b) scrivere la base di Lagrange associata ai punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1/2$ (2 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare le maggiorazioni di errore per le formule di Newton–Cotes composite (5 punti);

b) approssimare l'integrale

$$\int_0^5 x^2 e^{-x} dx$$

con una formula dei trapezi composita su $m = 5$ sottointervalli (2 punti);

c) dimostrare che nella formula dei trapezi composita a nodi equidistanti, l'errore si comporta asintoticamente come

$$\int_a^b f(x)dx - I_{1,m}(f; a, b) \sim Ch^2 \int_a^b f''(x)dx$$

per $m \to \infty$ (4 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 18.01.16

Esercizio 1.
a) Descrivere la strategia di approssimazione ad un passo per EDO, fornendone gli esempi più importanti (3 punti);
b) enunciare e dimostrare il relativo teorema di convergenza (6 punti).

Esercizio 2.
a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams, ed esporre i risultati principali su questa classe di schemi (2+2 punti);
b) calcolare la regione di stabilità assoluta del metodo di Eulero esplicito (2 punti);
c) costruire un metodo predictor–corrector basato sull'accoppiamento del metodo di Eulero esplicito con il corrispondente metodo di Adams–Moulton ad un passo (2 punti).

Esercizio 3. Dopo aver definito le nozioni di consistenza, stabilità e convergenza per un metodo alle differenze, enunciare e dimostrare il teorema di equivalenza di Lax–Richtmeyer per equazioni evolutive (2+6 punti).

Esercizio 4. Data la equazione del calore unidimensionale

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x,t) \in [0,1] \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \end{cases}$$

a) descrivere la strategia di approssimazione alle differenze, e dimostrare la consistenza e la stabilità della versione semidiscreta (4 punti);
b) scriverne la versione totalmente discreta basata sul metodo di Eulero esplicito in tempo, e dare la condizione di monotonia dello schema (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 08.02.16

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari, enunciandone le condizioni necessarie e/o sufficienti di convergenza (3 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Richardson (5 punti);

c) dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

individuare l'intervallo massimale del passo β per cui il metodo di Richardson è convergente (3 punti).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza del metodo di bisezione (5 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per le interpolazioni in una base generica (6 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la costruzione delle formule di Newton–Cotes semplici e composite (3 punti);

b) calcolare (con il minimo numero di integrazioni) i pesi della formula aperta a quattro punti (3 punti);

c) dopo aver fornito la versione composita delle formule dei trapezi e di Simpson, approssimare l'integrale

$$\int_0^3 e^{-x} dx$$

con le due formule composite, usando passo $h = 1/2$ (4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 13.04.16

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito le nozioni di consistenza, zero-stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (2+6 punti);

b) Scrivere il metodo di Heun e dimostrare che è consistente con il secondo ordine (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di costruzione dei metodi di Adams e fornirne un esempio (3 punti);

b) verificarne la consistenza e la zero-stabilità (3+3 punti);

c) costruire il metodo di Adams–Bashforth a due passi (4 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire un metodo predictor–corrector utilizzando il predictor di Adams esplicito a due passi dell'esercizio precedente ed il corrispondente metodo implicito a due passi

$$u_{k+1} = u_k + h\left(-\frac{1}{12}f(u_{k-1}) + \frac{8}{12}f(u_k) + \frac{5}{12}f(u_{k+1})\right)$$

(2 punti);

b) calcolare l'ordine di consistenza dello schema così costruito in caso si effettui *una sola iterazione* di correzione (2 punti);

b) calcolarne (sempre ipotizzando di effettuare una sola iterazione di correzione) il polinomio di stabilità assoluta (4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 28.05.16

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito in forma astratta l'approssimazione di Galerkin di un problema ellittico, enunciare e dimostrare il lemma di Céa (2+5 punti);

b) costruire uno spazio di elementi finiti di grado $p = 1$ in una dimensione, e calcolare la matrice di rigidità associata all'equazione di Poisson a coefficienti costanti (4 punti).

Esercizio 2.

a) Costruire l'approssimazione mediante differenza seconda centrata per la derivata seconda in una dimensione, e applicarla alla semi-discretizzazione dell'equazione del calore, dimostrandone l'ordine di consistenza (4 punti);

b) dopo aver applicato una discretizzazione temporale di tipo Eulero esplicito, dimostrare la condizione di stabilità l^∞ dello schema (3 punti);

c) applicando invece una discretizzazione temporale di tipo Eulero implicito, dimostrare la stabilità dello schema completamente discreto nel senso di Von Neumann (4 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire l'approssimazione della derivata prima mediante differenza centrata e dimostrarne l'ordine di consistenza (4 punti);

b) applicare questa approssimazione della derivata alla costruzione dello schema di Lax–Friedrichs per l'equazione del trasporto a coefficienti costanti in una dimensione e studiarne la stabilità in una norma a scelta (3 punti);

c) effettuare una analisi di stabilità di Von Neumann per la combinazione di differenza centrata (in spazio) ed Eulero implicito (in tempo) (4 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 13.06.16

Esercizio 1.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Jacobi (5 punti);

b) dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + \alpha x_2 = 1 \end{cases}$$

dire (in modo se possibile ottimale) qual è l'insieme di variabilità del parametro α per cui si ha convergenza del metodo di Jacobi (4 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per equazioni scalari ed enunciarne i risultati di convergenza (3 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza monotona per il metodo di Newton (6 punti).

Esercizio 3.

a) Dopo aver descritto la strategia di approssimazione per interpolazione, enunciare la formula di rappresentazione dell'errore di interpolazione per funzioni regolari (2+2 punti);

b) maggiorare il più accuratamente possibile, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, l'errore di una interpolazione composita di primo grado della funzione

$$f(x) = e^{-x} \sin x,$$

supponendo di lavorare a nodi equidistanti con passo h (3 punti).

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il teorema di Polya (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 13.06.16

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito le nozioni di consistenza, stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (1+6 punti);

b) calcolare la regione di stabilità assoluta per il metodo di Eulero implicito (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la costruzione dei metodi BDF ed enunciare i principali risultati teorici ad essi relativi (3 punti);

b) costruire il metodo BDF a due passi (4 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire una approssimazione alle differenze per l'equazione ellittica

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

e dimostrarne consistenza e stabilità nella norma l^2 (1+3+3 punti).

Esercizio 4.

a) Dopo aver definito opportunamente consistenza, stabilità e convergenza, enunciare il teorema di Lax–Richtmeyer (3 punti);

b) costruire il metodo "upwind" per l'equazione del trasporto undimensionale a coefficienti costanti ed effettuarne l'analisi di convergenza in una norma a piacere (2+4).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 11.07.16

Esercizio 1.

a) Descrivere la stregia generale di costruzione dei metodi di Runge–Kutta espliciti e dimostrare le condizioni di consistenza per il metodi a due stadi (2+5 punti);

b) posto $z = h\lambda = x + iy$, esprimere la regione di stabilità assoluta per il metodo di Heun in forma più esplicita possibile (4 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare la condizione delle radici per i metodi a più passi (2 punti);

b) applicarla per dimostrare la zero-stabilità dei metodi di Adams (3 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire la approssimazione "upwind" per l'equazione di reazione–trasporto non omogenea

$$u_t(x,t) + au_x(x,t) + bu(x,t) = f(x)$$

con $a, b > 0$, $x \in \mathbf{R}$ ed una griglia illimitata di nodi $x_j = j\Delta x$ ($j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), e dimostrarne le condizioni di stabilità in l^∞ (2+3 punti);

b) verificare che, approssimando la derivata u_x con la differenza opposta, si può ottenere uno schema stabile per alcune coppie $\Delta x, \Delta t$, ma non per $\Delta x, \Delta t \to 0$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Definire la formulazione debole e l'approssimazione di Galerkin per un problema ellittico (3 punti);

b) enunciare e dimostrare il lemma di Céa (5 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 12.09.16

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito i concetti di consistenza, stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (1+6 punti);

b) posto $z = h\lambda = x + iy$, calcolare la regione di stabilità assoluta per il metodo di Eulero Esplicito (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams espliciti ed impliciti (3 punti);

b) costruire il metodo di Adams esplicito ad un passo, ed il suo corrispettivo implicito (2+2 punti).

Esercizio 3. Dopo aver definito opportunamente i concetti di consistenza, stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare (per la sola parte di sufficienza) il teorema di Lax–Richtmeyer (6 punti).

Esercizio 4.

a) Costruire la approssimazione di Lax–Friedrichs per l'equazione del trasporto

$$u_t(x,t) + au_x(x,t) = 0$$

con $x \in \mathbf{R}$ ed una griglia illimitata di nodi $x_j = j\Delta x$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (2 punti);

b) dimostrarne la consistenza e la stabilità in una norma a piacere (3+3 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 05.11.16

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione LU di una matrice ed il suo uso nella soluzione di sistemi lineari (3 punti);

b) dimostrare che il fattore triangolare inferiore è formato dai moltiplicatori (6 punti);

Esercizio 2.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari ed enunciarne i risultati di convergenza (4 punti);

b) dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di Richardson (4 punti).

Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

dire per quale intervallo di valori di $\beta \in \mathbf{R}$ il metodo di Richardson:

c) è convergente (2 punti);

d) è contrattivo in norma $\|\cdot\|_\infty$ (3 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare il teorema generale sull'ordine di convergenza dei metodi iterativi per equazioni scalari, e dimostrare la sua applicazione al metodo di Steffensen (2+6 punti);

b) discutere (senza entrare nei dettagli formali) se si possa, e sotto quali ipotesi, dimostrare un teorema di convergenza monotona per il metodo di Steffensen (3 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 09.01.17

Esercizio 1.

a) Definire la costante di Lebesgue per una base $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ in un intervallo I, e calcolarla nel caso di una interpolazione di Lagrange sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ nell'intervallo $I = [-2, 2]$ (1+3 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza delle interpolazioni in una base generica (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di interpolazione di Hermite (3 punti);

b) Costruire la base di Hermite per una interpolazione nell'intervallo $[-2, 2]$, con nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ed utilizzando i dati $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f'(x_1)$ e $f(x_2)$ (5 punti);

c) Maggiorare il più accuratamente possibile l'errore di interpolazione su I (4 punti);

d) Derivare dalla costruzione precedente una formula di integrazione numerica (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere i principi generali della strategia di integrazione Gaussiana (2 punti);

b) Enunciare e dimostrare il teorema sul grado di precisione delle formule di Gauss–Legendre (6 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 09.01.17

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito le nozioni di consistenza, zero-stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per metodi ad un passo espliciti ed impliciti (2+6 punti);

Esercizio 2.

a) Descrivere costruzione e caratteristiche generali degli schemi BDF (3 punti);
b) Costruire lo schema BDF a due passi (4 punti);
c) Verificare che soddisfa la condizione delle radici (3 punti).

Esercizio 3.

a) Descrivere le approssimazioni di Galerkin per equazioni ellittiche, in particolare con applicazione all'equazione di Poisson (3 punti);
b) Enunciare e dimostrare il Lemma di Céa (5 punti).

Esercizio 4.

a) Costruire la approssimazione alle differenze centrate per l'equazione del calore in una dimensione spaziale, con condizioni di Dirichlet omogenee (3 punti);
b) Calcolare le condizioni di stabilità e monotonia nela caso di una discretizzazione temporale di tipo Eulero esplicito (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 01.02.17

Esercizio 1.

a) Descrivere il metodo di Doolittle per la fattorizzazione LU e derivarne il metodo di Cholesky, calcolando la complessità di entrambi (4+3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema generale sull'ordine di convergenza dei metodo iterativi per equazioni scalari (5 punti);

b) supponendo che l'equazione $f(x) = 0$ abbia una radice doppia in $\bar{x}$, e che si utilizzi il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \alpha f(x_k)^\beta,$$

discutere la scelta dei parametri α e β in modo da ottenere la convergenza a $\bar{x}$ (4 punti).

Esercizio 3.

a) Enunciare e dimostrare la maggiorazione di errore per interpolazioni composite (6 punti);

b) Calcolare (il più accuratamente possibile) quanti nodi sono necessari per avere un errore minore di 10^{-5} interpolando la funzione

$$f(x) = e^x$$

nell'intervallo $[-1, 1]$, a nodi equidistanti e con grado $n = 1$ (3 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere la costruzione delle formule di Newton–Cotes semplici e composite ed enunciarne il teorema di convergenza (4 punti);

b) calcolare i pesi della formula aperta a quattro punti (3 punti);

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 01.02.17

Esercizio 1.

a) Esporre la forma generale di un metodo di Runge–Kutta esplicito, fornendo almeno un esempio (3 punti);

b) scrivere un generico metodo di Runge–Kutta esplicito a due stadi e dimostrare le condizioni per il secondo ordine di consistenza (5 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams (2 punti);

b) enunciare la condizione delle radici e verificare che i metodi di Adams la soddisfano (2 punti);

c) costruire il metodo di Adams–Bashforth a due passi (3 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire la formula della differenza seconda centrata e dimostrarne l'ordine di consistenza (4 punti);

b) applicare la formula del punto *a*) alla approssimazione della equazione di Poisson unidimensionale

$$\begin{cases} -u_{xx}(x,t) = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ed analizzare la stabilità dello schema in una norma a piacere (5 punti).

Esercizio 4.

a) Dopo aver opportunamente definito le proprietà di consistenza, stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di Lax–Richtmeyer (6 punti);

b) definire la nozione di monotonia per uno schema alle differenze, e fornire un esempio di schema monotone (2 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 20.02.17

Esercizio 1.

a) Descrivere i principali metodi iterativi per sistemi lineari, e discuterne i criteri di arresto (3+2 punti);

b) dato una sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e supponendo di applicare il metodo di Jacobi, calcolare la costante di contrazione del metodo (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo di bisezione (5 punti);

b) supponendo di risolvere per bisezione l'equazione $\sin x = 0$ in $[-\pi/4, 5\pi/2]$, si dica a quale delle radici converge l'algoritmo, e quante iterazioni sono necessarie per ottenere un errore minore di 10^{-6} (3 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore per interpolazione per funzioni regolari e derivarne le maggiorazioni principali (6 punti).

Esercizio 4.

a) Descrivere i principi generali di costruzione delle formule di integrazione Gaussiane e fornirne un esempio di grado basso (2+2 punti);

b) dimostrare che i polinomi di Legendre hanno radici reali e semplici in (a, b) (6 punti);

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 14.04.17

Esercizio 1.

a) Dopo aver definito le nozioni di consistenza, zero-stabilità e convergenza, enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per i metodi ad un passo (2+6 punti);

b) Scrivere il metodo di Crank–Nicolson e dimostrare che è consistente con il secondo ordine (3 punti);

c) Calcolare la regione di stabilità assoluta, sempre per il metodo di Crank–Nicolson (3 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia di costruzione dei metodi BDF ed enunciarne le principali proprietà (3 punti);

b) Costruire il metodo BDF2 e verificarne la zero-stabilità (4+3 punti).

Esercizio 3.

a) Costruire un metodo predictor–corrector utilizzando il predictor di Eulero esplicito nel metodo BDF2 (2 punti);

b) calcolare l'ordine di consistenza dello schema così costruito in caso si effettui *una sola iterazione* di correzione (2 punti);

b) calcolarne (sempre ipotizzando di effettuare una sola iterazione di correzione) il polinomio di stabilità assoluta (4 punti).

ESONERO DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 29.05.17

Esercizio 1.

a) Costruire l'approssimazione mediante differenza seconda centrata per la derivata seconda in una dimensione, e applicarla alla discretizzazione dell'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee in una dimensione, dimostrandone l'ordine di consistenza (4 punti);

b) dimostrare che il sistema lineare così ottenuto è nonsingolare (3 punti);

b) analizzare la stabilità dello schema in una norma a piacere (4 punti);

c) mostrare le modifiche da apportare per implementare condizioni di Dirichlet non omogenee (2 punti);

d) considerato il caso bidimensionale con griglia quadrata $N \times N$, costruire una struttura di dati per rappresentare la soluzione numerica ed il relativo operatore laplaciano discreto (3 punti).

Esercizio 2.

a) Costruire l'approssimazione mediante differenza seconda centrata per la derivata seconda in una dimensione, e applicarla alla semi-discretizzazione dell'equazione del calore in una dimensione, dimostrandone l'ordine di consistenza (4 punti);

b) dopo aver applicato una discretizzazione temporale di tipo Eulero esplicito, dimostrare la condizione di stabilità l^∞ dello schema (3 punti);

c) applicando invece una discretizzazione temporale di tipo Eulero implicito, dimostrare la stabilità dello schema completamente discreto nel senso di Von Neumann (4 punti).

Esercizio 3. Data l'equazione di Bürgers viscosa in una dimensione,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (x \in \mathbf{R}),$$

e supponendo $u(x, t) > 0$,

a) costruirne una approssimazione dove il termine di trasporto sia discretizzato "upwind" in spazio ed esplicito in tempo, mentre il termine di diffusione con differenza seconda centrata, ed implicito in tempo (4 punti);

b) calcolare l'ordine di consistenza dello schema ottenuto (2 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN410) – 19.06.17

Esercizio 1.

a) Descrivere la fattorizzazione LU, e derivarne quella di Cholesky (3+2 punti);

b) fattorizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

con il metodo di Cholesky (3 punti).

Esercizio 2.

a) Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per il metodo delle corde (5 punti);

b) supponendo di cercare la soluzione più grande dell'equazione

$$\sin \frac{1}{x} = 0,$$

trovare un intervallo adeguato per applicare il metodo delle corde, calcolare la costante di contrazione del metodo e dire quante iterazioni sono necessarie per avere un risultato esatto in aritmetica `float` (4 punti).

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la formula di rappresentazione dell'errore per interpolazione per funzioni regolari e derivarne le maggiorazioni principali (6 punti).

Esercizio 4.

a) Enunciare e dimostrare il teorema generale di convergenza per le formule di integrazione di Newton–Cotes composite (5 punti);

b) approssimare con la formula di Simpson composita l'integrale

$$\int_0^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

utilizzando 7 nodi (3 punti).

ESAME DI ANALISI NUMERICA (AN420) – 21.06.17

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza per gli schemi ad un passo (6 punti).

Esercizio 2.

a) Descrivere la strategia generale di costruzione dei metodi di Adams (2 punti);

b) enunciare la condizione delle radici e verificare che i metodi di Adams la soddisfano (2 punti);

c) costruire il metodo di Adams–Bashforth a tre passi (4 punti).

Esercizio 3. Data l'equazione del trasporto a coefficienti variabili

$$u_t + f(x)u_x = g(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

e supponendo $f(x) > 0$,

a) Costruire lo schema upwind e dimostrarne consistenza e monotonia (5 punti);

b) costruire lo schema semi-discreto con approssimazione centrata della derivata u_x, e dare almeno un esempio di discretizzazione temporale che renda stabile lo schema totalmente discreto (3 punti).

Esercizio 4.

a) Dopo aver opportunamente definito le proprietà di consistenza, stabilità e convergenza per uno schema completamente discreto, enunciare e dimostrare il teorema di Lax–Richtmeyer (6 punti);

b) esporre la filosofia generale della analisi di stabilità di Von Neumann (3 punti).