Prova scritta di AM4 del 8/9/2006 – (Appello X)

- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

1 (i) Dare due (o più) definizioni equivalenti di insieme di misura nulla.
(ii) Dimostrare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ con $m \le n$ e se $Q \subset \mathbb{R}^m$ allora $f(Q)$ è di misura nulla. Cosa si può dire nel caso $m > n$?
(iii) È vero che se $Q \subset \mathbb{R}^n$ è di misura nulla allora è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura è zero? E se a "Lebesgue" si sostituisce "Peano–Jordan"?

2 Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza monotona.

3 Enunciare i teoremi di Stokes in $\mathbb{R}^3$ e Green in $\mathbb{R}^2$ e derivare quest'ultimo dal primo.

4 Verificare il teorema della divergenza (calcolando separatamente l'integrale di superficie e l'integrale di volume) nel seguente caso:

$$D := \{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x|_2 < 1 \ , \ x_3 > 0\} \ , \qquad F(x) := |x|_2^2 \ x \ .$$

5 Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \dfrac{\sin x}{\log x}$. Dimostrare:
(i) $f \notin \mathcal{L}^1((0, \infty))$;
(ii) $f \in \mathcal{L}^1((0, 1))$.
(iii) Esiste $\lim_{r \to \infty} \int_{1/r}^{r} f(x) dx$?