Prova scritta di AM4 del 14/7/05
Appello C

1) Sia $G := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = e^{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \} \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Dimostrare che G è un insieme di misura nulla.

(ii) Dire se G è misurabile in senso generalizzato (secondo Peano-Jordan).

[Risp: (ii) Sì]

2) Definire la funzione f di Cantor. Trovare un punto $x_0 \in (0,1)$ t.c. $f(x) < f(y)$ $\forall$ $0 < x < x_0 < y < 1$.

[Risp: $x_0 \in C \setminus \{$ estremi degli intervalli $I_j^{(k)}, \forall k, j \}$]

3) Enunciare il teorema del cambio di variabile in $\mathbb{R}^2$ e dimostrarlo nel caso di trasformazioni lineari.

4) Discutere la convergenza delle serie di Fourier in $R_2((0,2\pi))$.

5) (i) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica $f(x) := \operatorname{sen}^3 x$.

(ii) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(*) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}^3 x, & t > 0, \ x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 . \end{cases}$$

[Risp: (i) $\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

(ii) le soluzioni di $(*)$ hanno la forma

$$\left(\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{108} \sin 3x \right) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt + b_n) \sin nx$$]