Prova scritta di AM4 del 18/2/2005
Appello B

Motivare il lavoro svolto. Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.

1) (i) Dare le definizioni di insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^2$ e di insieme misurabile secondo Peano–Jordan in $\mathbb{R}^2$ che ha misura nulla; discutere le eventuali differenze.
(ii) Dimostrare che se un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ ammette un ricoprimento numerabile di rettangoli chiusi la somma delle cui misure è arbitrariamente piccola allora ammette anche un ricoprimento numerabile di quadrati aperti la somma delle cui misure è arbitrariamente piccola.

2) (i) Definire e discutere brevemente le proprietà notevoli di $\mathcal{R}_1((0,1))$.
(ii) Dimostrare o confutare la seguente affermazione: $\mathcal{R}_1((0,1))$ *è un'algebra: in particolare il prodotto di due funzioni in* $\mathcal{R}_1((0,1))$ *appartiene a* $\mathcal{R}_1((0,1))$.

3) (i) Definire la "funzione di Cantor" $f : [0,1] \to [0,1]$.
(ii) Dire se f è integrabile secondo Riemann in senso proprio o in senso generalizzato e (in caso di risposta affermativa) calcolarne l'integrale.

4) Discutere la relazione tra decadimento di $\hat{f}$ e regolarità di f (dove $\hat{f}$ denota la trasformata di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

5) Sia f la funzione di periodo 1 che coincide con l'identità su $[0,1)$. Trovare una soluzione $t \to x(t)$ di periodo 1 della seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = f \ .$$