Soluzioni 9-AM4

Laura Di Gregorio

22 novembre 2004

1) Le due condizioni omogenee $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ suggeriscono di cercare una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(t) \sin kx.$$

Mettendo tale espressione nell'equazione si ottiene che gli u_k devono soddisfare

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \pi^2 u_1 = (1+t^2) \qquad k=1 \\ \ddot{u}_6 + 36\pi^2 u_6 = (1+t^2) \qquad k=6 \\ \ddot{u}_k + k^2\pi^2 u_k = 0 \qquad k \neq 1,6\,. \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione differenziale si ottiene

$$u_1(t) = a_1 \cos \pi t + b_1 \sin \pi t + \bar{u}_1(t)$$

dove

$$\bar{u}_1(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(t^2 + \frac{\pi^2 - 2}{\pi^2}\right)$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Imponendo le condizioni

$$u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0$$

si ha che

$$u_1(t) = \frac{2-\pi^2}{\pi^4}\cos \pi t + \bar{u}_1(t)\,.$$

Analogamente per la seconda equazione

$$u_6(t) = a_6 \cos \pi t + b_6 \sin \pi t + \bar{u}_6(t)$$

e con le stesse considerazioni si ottiene che

$$u_6(t) = \frac{1}{36\pi^2}\left(\frac{1}{18\pi^2} - 1\right)\cos \pi t + \bar{u}_6(t)$$

dove

$$\bar{u}_6(t) = \frac{t^2}{36\pi^2} + \frac{1}{36\pi^2}\left(1 - \frac{1}{18\pi^2}\right)\,.$$

Per quanto riguarda la terza equazione si ha che

$$u_k(t) = a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t \qquad k \neq 1, 6$$

e in particolare dalle condizioni iniziali segue che

$$a_4 = 1 \qquad \text{e} \quad a_k = 0 \qquad k \neq 1, 4, 6$$

da cui segue che

$$u_4(t) = \cos 4\pi t \qquad \text{e} \quad u_k(t) = 0 \qquad k \neq 1, 4, 6\,.$$

Dunque la soluzione richiesta è

$$u(x,t) = u_1(t) \sin x + u_4(t) \sin 4x + u_6(t) \sin 6x\,.$$

2) Le due condizioni omogenee $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ suggeriscono di cercare una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} u_k(t) \sin kx.$$

Dall'equazione segue che

$$u_k(t) = A_k \cos kt + B_k \sin kt\,.$$

Dalla condizione $u_t(x,0) = 0$ segue che $B_k = 0$ mentre dalla condizione $u(x,0) = \phi(x)$ segue che

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(x) \sin kx \, dx$$

ovvero il k-esimo coefficiente di Fourier della riflessione dispari di $\phi(x)$. Si ha

$$\int_0^\pi \phi(x) \sin kx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin kx \, dx\,.$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx \, dx = -\frac{\pi}{2k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\,.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, ponendo $\pi - x = \xi$ si ha

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - x) \sin kx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi \sin k(\pi - \xi) \, d\xi$$

e osservando che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi \sin k(\pi - \xi)\, d\xi = \begin{cases} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi \sin k\xi \, d\xi & k \text{ pari} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi \sin k\xi \, d\xi & k \text{ dispari} \end{cases}$$

si ha che (si ricordi che $\cos(k\pi/2) = 0$ per k dispari)

$$A_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) & k \text{ dispari}\,. \end{cases}$$