Soluzioni 8-AM4

Laura Di Gregorio

15 novembre 2004

1) $\underline{h=2}$: $f(x) = x^2$ è una funzione pari. I coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin kx\,dx \\ &= -\frac{2}{k^2\pi}\left[x\,\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 4\frac{(-1)^k}{k^2}\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Infine otteniamo

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k\geq 1} 4\frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

$\underline{h=3}$: $f(x) = x^3$ è una funzione dispari. I coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin kx\,dx \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3 \cos kx}{k}\right]_{0}^{\pi} + \frac{6}{k\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,\cos kx\,dx \\ &= -(-1)^k\frac{2\pi^2}{k} + (-1)^k\frac{12}{k^3} = 2\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{6}{k^2} - \pi^2\right). \end{aligned}$$

Inoltre

$$a_0 = 0\,.$$

2) $f(x) = |x|$ è l'estensione pari di $\tilde{f}(x) = x$ su $[0, \pi)$. Dunque

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\cos kx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin kx}{k}\right]_{0}^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1]\,. \end{aligned}$$

Inoltre
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x = \frac{\pi}{2}\,.$$

3) Osserviamo che
$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\,.$$

Dunque
$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos^3 x)^2 = \frac{1}{16}(9\cos^2 x + \cos^2 3x + 6\cos x\cos 3x) \\ &= \frac{1}{16}\left[9\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + 3(\cos 4x + \cos 2x)\right] \\ &= \frac{1}{32}(10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x)\,. \end{aligned}$$

4) La serie di Fourier associata ad x in $[0, 2\pi)$ è
$$x = \pi - \sum_{k\geq 1}\frac{2}{k}\sin kx$$

e quella associata ad x^2 è
$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx\right)$$

da cui segue che
$$f(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

5) La serie di Fourier associata ad x^3 in $[0, 2\pi)$ è
$$x^3 = 2\pi^3 + \sum_{k\geq 1}\left[\frac{12\pi}{k^2}\cos kx + \left(\frac{12}{k^3} - \frac{8\pi^2}{k}\right)\sin kx\right]$$

e usando anche i risultati dell'esercizio precedente segue che
$$f(x) = \sum_{k\geq 1}\frac{\sin kx}{k^3}.$$