Soluzioni 5-AM4

Laura Di Gregorio

25 ottobre 2004

1. Siano $y < x$ due punti di C. Sia k tale che $\frac{1}{3^k} \leq |x-y| < \frac{1}{3^{k-1}}$. Allora esiste j tale che $x, y \in I_j^{(k-1)}$ (sono gli intervalli definiti nel capitolo *L'insieme ternario di Cantor*). Sia $\alpha := \log 2/\log 3$. Si avrà:

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq 3^\alpha k|f(x)-f(y)| = 2^k|f(x)-f(y)| \\ &\leq 2^k\big(|f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f_(y)|\big) \\ &\leq 2^k\left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = 6.\end{aligned}$$

2. Si vari opportunamente la costruzione dell'insieme ternario di Cantor come segue. Sia $\sigma < 1/2$ ed alla mappa $\mathcal{C}$, definita nel capitolo *L'insieme ternario di Cantor*, si sostituisca la mappa $\mathcal{C}_\sigma$ che ad un intervallo $[a,b]$ di lunghezza δ, associa i due sottointervalli $[a, a+\sigma\delta]$ e $[b-\sigma\delta, b]$ (l'insieme ternario di Cantor corrisponde a $\sigma = 1/3$). La funzione di Cantor associata risulterà essere Hölderiana di esponente $\alpha = (\log 2)/(\log \sigma^{-1})$.
3. Dalla convergenza uniforme si ha che

$$\int_0^1 f = \lim \int_0^1 f_k = 1.$$

4. Sia $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, siano $0 = a_0 < \ldots < a_n = 1$ tali che $g \in C^1\big((a_{j-1}, a_j)\big)$, $1 \leq j \leq n$. Sia $E = [0,1] \setminus \Big(\bigcup_j a_j\Big)$, risulta:

$$\int_E g' = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} g' = \sum_{j=1}^n \Big(g(a_j) - g(a_{j-1})\Big) = g(1) - g(0).$$

(i) Si prenda $g = f_k$, $E = E_k$ e si osservi che $f_k(1) = 1$, $f_k(0) = 0$.
(ii) Risulta $0 \leq g \leq c\chi_{C_k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, dal momento che $C \subset C_k$. Inoltre

$$\int c\chi_{C_k} = c\mathrm{mis}(C_k)$$

ed essendo C_k insiemi elementari la cui misura tende a 0 per k tendente all'infinito, si ha che g è Riemann integrabile e $\int_0^1 g = 0$.